HỆ THỐNG KIẾN THỨC TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

Biên soạn: **Huỳnh Văn Lượng** (0918.859.305-01234.444.305-0929.105.305)

	Hoán vị	Chỉnh hợp	Tổ hợp
Công thức	$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Ý nghĩa	Hoán vị của n phần tử (P_n) là số cách hoán đổi vị trí của n phần tử	Chỉnh hợp chập k của n phần tử (A_n^k) là số cách chọn có thứ tự k phần tử từ n phần tử	Tổ hợp chập k của n phần tử (C_n^k) là số cách chọn không thứ tự k phần tử từ n phần tử
Tính chất	$0!=1$ $1!=1$ $n!=1.2.3\dots n$	$A_n^n=1$ $A_n^1=n$	$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ $C_n^k = C_n^{n-k}$

Nhị thức Newtơn	
Công thức	$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}.b^1 + C_n^2 a^{n-2}.b^2 + C_n^3 a^{n-3}.b^3 + \dots + C_n^{n-1} a^1.b^{n-1} + C_n^n b^n$ $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$
Tính chất	Xét khai triển $(a+b)^n$ $\begin{cases} \text{gồm } (n+1) \text{ số hạng} \\ T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}.b^k \end{cases}$

Biến cố	
Khái niệm	✍ Phép thử: là một thí nghiệm hay một hành động mà ta không đoán trước được kết quả dù có thể biết được tất cả các kết quả có thể xảy ra của nó. ✍ Không gian mẫu: là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử, ký hiệu là Ω ✍ Biến cố: là một tập con của không gian mẫu. ✍ Biến cố đối của biến cố A là: $\overline{A} = \Omega \backslash A$ (**A** xảy ra $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ không xảy ra) ✍ Hai biến cố A, B được gọi là xung khắc nhau $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$ (**A, B** không đồng thời xảy ra)
Xác suất	$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ $\begin{cases} n(A): \text{số kết quả thuận lợi cho biến cố A} \\ n(\Omega): \text{số phần tử của không gian mẫu (số kết quả có thể xảy ra của p.thử)} \end{cases}$
Tính chất	✍ $P(\Omega)=1$ ✍ $P(\varnothing)=0$ ✍ $0 \le P(A) \le 1$
Các phép tính	✍ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ($\overline{A}$ là biến cố đối của **A**) ✍ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (với A và B xung khắc nhau) ✍ $P(A.B) = P(A).P(B)$ (với A và B độc lập) (lưu ý là $A.B = A \cap B$)
Biến ngẫu nhiên rời rạc	✍ ***Bảng phân phối xác suất:*** X: x_1, x_2, …., x_n P: p_1, p_2, …., p_n (trong đó: $p_1+p_2+\dots+p_n=1$) ✍ ***Kỳ vọng (độ lớn trung bình của X):*** $E(X) = x_1.p_1 + x_2.p_2 + x_3.p_3 + \dots + x_n.p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.p_i$ ✍ ***Phương sai (mức độ phân tán các giá trị của X xung quanh giá trị trung bình):*** $V(X) = (x_1-\mu)^2.p_1 + (x_2-\mu)^2.p_2 + \dots + (x_n-\mu)^2.p_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu).p_i$ (với $\mu = E(X)$) ✍ ***Độ lệch chuẩn:*** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN

Download miễn phí tại website: ***www.huynhvanluong.com***

Biên soạn: **Huỳnh Văn Lượng** (0918.859.305-01234.444.305-0929.105.305)

Bài 1 (DHAn ninh - 1997).Từ bảy chữ số 0,1,2,3,4,5,6 có thể thành lập được bao nhiêu sồ chẵn, mỗi số có năm chữ số khác nhau.

HD: có $A_6^4 + 3.5.A_5^3$=1260 số

Bài 2 (DH Huế - 1997).

Có bao nhiêu số tự nhiên(được viết trong hệ đém thập phân) gồm năm chữ số mà các chữ số đêù lớn hơn 4 và đôi một khác nhau? Tính tổng của tất cả các số tự nhiên nói trên.

HD:

Mỗi một chữ số tương ứng với một hoán vị của 5 phần tử 5,6,7,8,9.Vậy có P_5=1.2.3.4.5=120 số

Sự xuất hiện của các chữ số 5,6,7,8,9 ở mỗi hàng(đơn vị, trăm…) là như nhau nên tổng các chữ số ở hàng đơn vị của 120 số nêu trên là:

$(5+6+7+8+9)\dfrac{120}{5} = 810$

Suy ra tổng của 120 số là:

$840(1.10^0+1.10^1+1.10^2+1.10^3+1.10^4)=840.11111=933240$

Bài 3. (DHQG Hà Nội - 1997). Có 100.000 chiếc vé xổ số được đánh số từ 00.000 đến 99.999. Hỏi số các vé gồm năm chữ số khác nhau là bao nhiêu?

HD:

Theo đầu bài chữ số hàng chục nghìn cũng có thể bằng 0. Suy ra có $10.9.8.7.6 = A_{10}^5 = 30240$ vé gồm 5 chữ số khác nhau

Bài 4. (DH Thái Nguyên). Cho các số 1,2,5,7,8. Có bao nhiêu cách lập ra một số có ba chữ khác nhau từ năm số trên sao cho:

a) Số tạo thành là số chẵn.

b) Số tạo thành không có chữ số 7.

c) Số tạo thành nhỏ hơn 278.

HD:

a) Có 2 cách chọn hàng đơn vị nên có 2.4.3=24 số chẵn.

b) Chỉ được chọn trong 4 số, vậy có 4.3.2 =24 số không có chữ số 7.

c) Chữ số hàng trăm là 1 hoặc 2:Nếu là 1thì có 4.3= A_4^2 =12 số.Nếu là 2 thì số tạo thành chỉ có đúng 8 số (275,271,258,257,251,218,217,215) nhỏ hơn 278.

Bài 5. (DH Y Hà Nội). Cho mười chữ số 0,1,2,…,9. Có bao nhiêu số lẻ 6 chữ số khác nhau, nhỏ hơn 600000 xây dựng từ 10 chữ số đã cho.

Gải: Các chữ số hàng đơn vị(chữ số đầu tiên bên phải) được chọn từ các số 1,3,5,7,9.Chữ số đầu tiên bên trái được chọn từ các số 1,2,3,4,5.Bốn chữ số ở giữa có A_8^4 =8.7.6.5=1680 cách chọn.

<u>Bài 6.</u> (DH Lâm nghiệp - 1997). Cho các chữ số 0,2,4,5,6,8,9.

1. Có thể lập được bao nhiếu số có 3 chữ số mà trong mỗi số các chữ số khác nhau.
2. Có thể lập được bao số có 4 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết có mặt chữ số 5

Giải:1.Chữ số hang trăm phải khác 0 nên có 6 cách chọn.Hai chữ số còn lại có 6.5= A_6^2 =30 cách chọn. Vậy có tất cả 6.30=180 cách chọn.

2. Chữ số hàng nghìn phải khác 0, nếu là 5 thì 3 chữ số còn lại có 6.5.4= A_6^3=120 cách hay có 120 số.

Nếu chữ số hàng nghìn là 2 hoặc 4,5,6,8,9(5 cách chọn) thì trong 3 chữ số còn lại phải có một số là 5(1 cách chọn duy nhất), và hai số kia có 5.4= A_5^2=20 cách chọn. Vậy có 5.1.20=100 số. Tổng cộng có 120+100=220 số.

<u>Bài 7</u>. (CĐSP-TP.HCM - 1997).

Cho các chữ số 0,1,2,3,4,5. Từ các chữ số đã cho lập được bao nhiêu:

1. Số chẵn có 4 chữ số khác nhau. 2. Số chia hết cho 5 gồm 3 chữ số khác nhau.

Giải: 1. Số chẵn tận cùng là 0 có 5.4.3= A_5^3 =60 số. Số chẵn tận cùng là 2 hoặc 4 thì chữ số hàng phải khác 0, nên có $2.4.A_4^2 = 2.4.4.3 = 96$. Vậy có tất cả 60+96=156 số chẵn.

2.Số chia hết cho 5 phải có tận cùng là 0 hoặc 5.

- Nếu tận cùng là 0 sẽ có $5.4 = A_5^2 = 20$ số.
- Nếu tận cùng là 5 và chữ số hàng trăm phải khác 0 nên có 4.4=16 số. Vậy số các số cần tìm là 20+16=36 số.

Bài 8. (ĐHSPVinh - 1999). Cho 8 chữ số 0.1.2,3,4,5,6,7. Từ 8 chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm bốn chữ số, đôi một khác nhau và không chia hết cho 10.

Giải:Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$. Theo đầu bài a và d phải khác 0 nên a và d có 7.6 cách chọn.Còn b,c có 6.5 cách chọn. Vậy số các số cần tìm là 7.6.6.5=1260 số.

Bài 9 (ĐHQGTPHCM - 2000). 1. Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó chữ số đầu tiên là chữ số lẻ. 2. Có bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó có đúng 3 chữ số chẵn, 3 chữ số lẻ(Chữ số đầu tiên phải khác 0)?

Giải:1. Chữ số đầu tiên là chữ số le nên có 5 cách chọn, chữ số cuối cùng là chữ số chẵn nên có 5 cách chọn, khi đó 4 chữ số đứng giữa có $A_8^4 = 42000$ số. 2. Từ 5 chữ số chẵn chọn ra C_5^3 cách, cũng như vậy đối với chứ số lẻ. Với 6 chữ số có P_6=6! hoán vị, trong đó số các số

Bài 10. (ĐHSP Vinh - 2000). Tìm tất cả các số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.

Giải:Chữ số đầu tiên bên trái phải khác 0, vì nó nhỏ nhất nên chỉ xét từ 1 đến 9. Rõ ràng các chữ số phải khác nhau nên lấy 5 chữ số bất kỳ sẽ tạo nên một số(Theo thứ tự tăng dần). Vậy có: $C_9^5 = 126$ số

Bài 11. (Viện ĐH Mở HN - 2000)Cho 4 chữ số 1,2,3,4

a) Có thể lập được bao nhiếu số hàng nghìn gồm 4 chữ số khác nhau từ 4 chữ số đó.

b) Tính tổng các chữ số tìm được ở câu a)

Giải:a) Có P_4=4.3.2.1 = 24 số . b) Nhận thấy 24 số ở câu a) gồm 12 cặp số mà tổng mỗi cặp là 5555(Chẳng hạn 1234và 4321). Vậy tổng phải tìm là 12.5555 = 66660

Bài 12. (Học viện quốc tế - 2001). Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 7, 8, 9 thiết lập tất cả các số có chín chữ số khác nhau.Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số mà chữ số 9 ứng ở vị trí chính giữa.

Giải:Số hoán vị của 9 phần tử là 9!. Số 9 là bình đẳng như các chữ số khác nên các số có 9 vị trí ở chính giữa là $\frac{9!}{9} = 8! = 40320$

Bài 13. (ĐH Quốc gia TPHCM - 2001). Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau(chữ số đầu tiên khác 0) trong đó có mặt chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1.

Giải:Khi chữ số o ở hàng đơn vị, 5 chữ số còn lại được chọn từ 8 chữ số 2,3,4,5,6,7,8 có $A_8^5 = 8.7.6.5.4 = 6720$ cách chọn. Chữ số 0 có thể ở 5 vị trí(Vì chữ số đầu tiên khác 0)nên có $5.A_8^5 = 33600$ số thoả mản đầu bài.

Bài 14. (ĐH sư phạm 2 - 2001).Tính tổng các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một được thành lập từ 6 chữ số1,3,4,5,7,8.

Giải:Mỗi số ứng với chỉnh hợp chập 5 của 6 phần tử đã cho. Vậy có $A_6^5 = 720$ số.

Mỗi một trong các chữ số đã cho có số lần xuất hiện ở hàng đơn vị là như nhau và là $\frac{720}{6} = 120$. Suy ra tổng các chữ số ở hàng đơn vị của 120 số đang xét là 120(1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8) = 3360.

Đó cũng là tổng các chữ số ở hàng trục, trăm, nghìn,…nên tổng của 720 số đang xét là $3360(1+10+10^2+10^3+10^4+10^5) = 3360.(11111) = 37332960$.

Bài 15. (ĐH Ngoại thương cơ sở hai- TPHCM - 2001).

Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 thiết lập tất cả các số có sáu chữ số khác nhau. Hỏi trong các số thiết lập được có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau.

Giải:Vì có 6 vị trí nên số 6 nên nếu số 1 đứng trước thì có 5 trường hợp số 6 đứng ngay sau. Cũng có 5 trường hợp số 1 đứng ngay sau số 6. Trong mỗi trường hợp, bốn vị trí còn lại có 4.3.2.1 = p_4 cách chọn. Vậy có (5+5). P_4 = 240 số mà 6 và 1 đứng cạnh nhau. Có tất cả p_6 = 6! = 720 số co9s 6 chữ số. Suy ra số các số thỏa mãn đầu bài là 720 - 240 = 480.

Bài 16 (ĐH Quốc gia TPHCM - 1998).

Xét dãy số gồm 7 chữ số (mỗi số được chọn từ các chữ số 0, 1, 2,…., 8, 9) thoả mãn các tính chất sau:

- Chữ số ở vị trí thứ 3 là số chẵn.
- Chữ số ở vị trí cuối cùng không chia hết cho 5.

- Các chữ số ở vị trí thứ 4, thứ 5 và thứ 6 đôi một khác nhau.

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên như vậy(có giải thích)?

Giải:Xét dãy số (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) thỏa mản yêu cầu của đề bài.

Vì a_3 chẵn nên có 5 cách chọn (0, 2, 4, 6, 8)

Vì a_7 không chia hết cho 5 nên có 8 cách chọn(trừ 0,5)

Vì a_4, a_5, a_6 đôi một khác nhau nên có A_{10}^3 cách chọn

Vì a_1, a_2 tùy ý nên mỗi số có 10 cách chọn

Vậy có 5.8. A_{10}^3.10.10=2880000 dãy số thỏa mãn đầu bài.

Bài 17. (ĐHSP VINH - 1998). Viết các số có sáu chữ số bằng các chữ số 1, 2, 3, 4, 5(một chữ số xuất hiện hai lần, các chữ số còn lại xuất hiện một lần). Có bao nhiêu cách viết.

Giải: Giả sử chữ số 1 được viết hai lần, ta có $C_6^2 = \frac{6.5}{1.2}$ cách chọn vị trí để viết. Bốn vị trí còn lại được viết từ các chữ số 2,3,4,5 có p_4 cách viết. Vậy có $C_6^2.P_4$ cách viết có hai chữ số 1. Vì vai trò 5 chữ số 1,2,3,4,5 là như nhau nên có $5.C_6^2.p_4 = 1800$ cách viết.

Bài 18. (ĐH Xây dựng - 1998). Có bao nhiêu số tự nhiên khác nhau, nhỏ hơn 10000 tạo thành 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4.

Giải:

Số có 1 chữ số: Có 5 số (0, 1, 2, 3, 4).

Số có 2 chữ số(dạng $\overline{ab}$): Số có hàng chục khác 0 có 4.5 = 20 số.

Số có 3 chữ số(dạng $\overline{abc}$):Số có hàng trăm khác 0 có 4.5.5 = 100 số.

Số có 4 chữ số(dạng $\overline{abcd}$): Số có hàng nghìn khác 0 có 4.5.5.5 = 500 số.

Không thể có số có hơn 4 chữ số nhỏ hơn 10000. Vậy có 5 + 20 + 100 + 500 = 625 số.

Bài 19. (ĐH Sư phạm Vinh - 2000).Có bao nhiêu tự nhiên khác nhau gồm 7 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số la một số chẵn.

Giải: Chữ số đầu tiên bên trái khác 0 nên có 9 cách chọn, xét 5 chữ số tiếp theo mỗi số có 10 cách chọn, riêng chữ số hàng đơn vị cũng có 10 cách chọn nhưng chỉ có 5 cách thỏa mãn điều kiện của đề bài.

Vậy có: $9.10^5.5 = 4500000$ số.

Bài 20. (ĐH Sư phạm Hà Nội 2 - 2000). Có thể lập được bao nhiêu chữ số gồm 8 chữ số từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 trong đó chữ số 1 và 6 đều có mặt hai lần còn các chữ số khác xuất hiện một lần.

Giải:Số hoán vị của 8 phần tử là P_8 = 8! tức là có 8! số nhưng trong đó có các số trùng nhau vì khi bị đổi chỗ 2 chữ số 1 thì chỉ là một số, đổi chỗ 2 chữ số 6 cũng vậy. Vậy có $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.8! = 10080$ số.

Bài 21. (ĐH Thái nguyên-2000) Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là số lẽ.

Giải Chữ số đầu tiên bên trái khác 0 nên có 9 cách chọn, các chữ số còn lại đều có 10 cách chọn, riêng chữ số hàng đơn vị chỉ có 5 trong 10 cách chon cho tổng các chữ số của mỗi số là một số lẻ. Vậy có 9.10.10.10.5

Bài 22. (ĐH Thái Nguyên - 2000). Từ ba chữ số 1,2,3 có thể tạo ra được bao nhiêu chữ số gồm 5 chữ số, trong đó mặt đủ ba chữ số trên?

Bài 23. (ĐH Huế - 2001).Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số sao cho không có chữ số nào lập lại đúng ba lần.

Bài 24. (ĐH Quốc gia TPHCM - 2001). Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng hai lần, chữ số 3có mặt đúng ba lần và các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần.

Bài 25.(ĐH Sư phạm Quy Nhơn - 1997). Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2.

Giải: Giả sử 37 điểm đã cho không có ba điểm nào thẳng hàng

$\rightarrow$ Số tam giác tạo được là C_{37}^3. Nhưng qua 17điêm trên d_1 không

tạo được tam giác nàolại kể là C_{37}^3 tam giác, 20 điểm trên d_2 cũng coi là tạo được C_{20}^{3} tam giác. Vậy số tam giác thực sự có dươc là:

$$C_{37}^{3}-C_{20}^{3}-C_{17}^{3}=\frac{1}{2.3}.(37.36.35-20.19.18-17.16.150)=5950$$

Bài 26. (ĐHThái Nguyên - 1997).Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Cần chọn một nhóm gồm 3 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách: a) Chọn 3 học sinh bất kỳ b) Chọn 3 học sinh gồm 1 nam và 2 nữ
c) Chọn 3 học sinh trong đó có ít nhất 1 nam

Giải:a) Mỗi cách chọn một nhóm gồm 3 học sinh bất kỳ là một tổ hợp chập 3 của 40, vậy có

$A_{40}^{3}=\frac{40.39.38}{1.2.3}=9880$ cách chọn

b) Có C^1_{25} cách chọn 1 nam và $C_{15}^{2}=\frac{15.14}{1.2}=105$ cách chọn 2 nữ. Theo quy tắc nhân có 25.105= 2625 cách

c) có $C_{15}^{3}=\frac{15.14.13}{1.2.3}=455$ cách chọn 3 học sinh.Theo câu a)có 9800 cách chọn 3 học sinh bất kì. Suy ra số cách chốnc ít nhất 1 học sinh nam là:9800 – 455 = 9425

Bài 27. (Học viên khoa học quân sự - 1997).Có10 câu hỏi gồm 4 câu lý thuyết và 6 câu bài tập để cấu tạo thành một đề thi gồm 3 câu có cả lý thuyết và bài tập. Hỏi có bao nhiêu khả năng cấu tạo đề thi.

Giải: Chọn đề thi có 1 câu lý thuyết và 2 câu bài tập $C_{14}\times C_{6}^{2}$=4.15=16 cách

Chọn đề thi cho hai câu lý thuyết và hai câu bài tậpcó

$C_{4}^{2}\times C_{6}^{1}=6+6=12$ cách. vậy cố 16+12=28 cách

Bài 28. (ĐH Kiến trúc Hà Nội -1998). Một đội xây dựng gồm 10 công nhân 3 kỹ sư. Để lập một tổ công tác cần chọn một kỹ sư làm tổ trưởng một công nhân làm tổ phó và 5 công nhân tổ viên.Hỏi có bao nhiêu cách thành lập tổ công tác.

Giải:CÓ $3=C_{3}^{1}$ cách chọn một kỹ sư làm tổ trưởng10 = C^1_{10} cách chọn1 công nhân làm tổ phó.Với mỗi cách chọn tổ trưởng tổ phó có C^5_9 cách chọn 5 nhân tổ viên. Vậy có:

$3.10.C_{9}^{5}=3.10.\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}=3780$ cách lạp tổ công tác.

Bài 29. (ĐH Quốc gia TP.HCM - 1998).Một đa giác lồi n cạnh thì có bao nhiêu đường chéo?

Giải:Vì là đa giác nên không có 3 đỉnh nào thẳng hàng. Qua n đỉnh đó kẻ được C^2_n đường thẳng kẻ được C_n^2 đường thẳng phân biệt chứa các cạnh và đường chéo. Do có n cạnh nên số đường chéo là:

$$C_{n}^{2}-n=\frac{n.(n-1)}{2}-n=\frac{n.(n-3)}{2}$$

Bài 30. (ĐH Huế - 1999). Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Chọn ra 4 viên từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để số bi lấy ra không có đủ 3 màu.

Giải:Xét khả năng có đủ 3 màu:

Có 2 đỏ, 1 trắng,1 vàng: $C_{4}^{2}.C_{5}^{2}.C_{6}^{1}=\frac{4.3}{1.2}.5.6=180$ cách

Có 1 đỏ 2 trắng 1vàng: $C_{4}^{1}.C_{5}^{2}.C_{6}^{1}=4.\frac{5.6}{1.2}.6=240$ cách

Có đỏ 1trắng 2 vàng: $C_{4}^{1}.C_{5}^{1}.C_{6}^{2}=4.5.\frac{6.5}{1.2}=300$ cách

Vì có $C_{15}^{4}=1365$ cách chọn 4 viên bất kỳ trong hộp nên cách chọn để lấy ra 4 viên không đủ 3 màu là:

1365 - (180 + 240 + 300) = 645

Bài 31. (ĐH cảnh sát nhân dân - 1999).Cho tam giác ABC. Xét tập hợp 4 đường thẳng song song với AB, 5 đường thẳng song song với BC và 6 đường thăng song song với CA. Hỏi các đường thẳng này tạo được bao nhiêu tam giác và bao nhiêu hình thang (không kể hình binh hạnh).

Giải: Một tam giác được tạo bởi 3 đường thẳng thuộc 3 họ khác nhau. Vậy có: $4\cdot5\cdot6 = C_4^1\cdot C_5^1\cdot C_6^1 = 120$

Mỗi hình thang được tạo bởi 2 đường của cùng một họ, 2đường kín thuộc 2họ còn lại, vậy có

$C_4^2 C_5^1 C_6^1 + C_4^1\cdot C_5^2 + C_4^1 C_5^1\cdot C_6^2 = 720$ hình thang

<u>Bài 32.</u> (ĐHSư phạm Hà nội 2 - 1999). Một trường tiểu học có 50 học sinh đạt danh hiệu cháu ngoan Bác Hồ (trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi). Cần chọn một nhóm 3 học sinh trong số 50 học sinh trên đi dư Đại hội cháu ngoan Bác Hồ, sao cho trong nhóm không có cặp anh em sinh đôi nào. Hỏi có bao nhiêu cách?

Giải: Để chọn 3 học sinh bất kỳ trong 50 học sinh có: $C_{50}^3 = \dfrac{50\cdot49\cdot48}{1\cdot2\cdot3}$ cách

Cớ 48 cách chọn 1 học sinh để ghép cùng hai anh em sinh đôi Avà A' để tạo nên nhóm 3 học sinh trong đó có A, A'. Suy ra số nhóm 3 người có 2 anh em sinh đôi nào đó là $48\cdot4 = 192$. Vậy số nhóm 3 người không có cặp sinh đôi nào là $C_{50}^3 - 192 = 19408$.

<u>Bài 33</u>. (ĐH Sư phạm vinh - 1999). Một tổ sinh viên co20 em, trong đó chỉ có 8 em biết tiếng Anh, 7 em chỉ biết tiếng Pháp và 5 em chỉ biết tiếng Đức. Cần lập một nhóm đi thực tế gồm 3 em biết tiếng Anh, 4 em biết tiếng Pháp và 2 em biết tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm đi thực tế tổ sinh viên ấy.

<u>Kết quả</u> Có $C_8^3\cdot C_7^4\cdot C_7^4\cdot C_5^2 = \dfrac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}.\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}.\dfrac{5\cdot4}{1\cdot2} = 19600$ cách.

Bài 34. (Học viên kĩ thuật quân sư - 2000). Một đồn cảnh sát khu vực có 9 người. Trong ngày cần cử 3 người làm nhiệm vụ ở địa phương A, 2 người ở địa điểm B, còn 4 người thường trực tại đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công.

Giải: Cứ 3 người làm nhiệm vụ ở địa A có C_9^3 cách. Số người còn lại là 4 sẽ thường trực ở đồn. Vậy có $C_9^3.C_6^2 = \dfrac{9.8.7}{1.2.3}.\dfrac{6.5}{1.2} = 1260$ cách.

Bài 35. (ĐH Huế - 2000). Một lớp học có 30 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Có 6 học sinh được chọn để lập một tốp ca. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau:

1. Nếu phải có ít nhất 2 nữ ?
2. Nếu chọn tuỳ ý ?

Giải: 2. Nếu chọn tuỳ ý có $C_{45}^6 = \dfrac{45.44.43.42.41.40}{1.2.3.4.5.6} = 8145060$ cách.

1.Chọn 6 học sinh trong đó có đúng 1 nữ:15. C_{30}^6 cách.

Suy ra chọn 6 học sinh trong đó có ít nhất 2 nữ có $C_{45}^6 - (C_{30}^6 + 15.C_{30}^5) = 8145060 - 2731365 = 5413695$ cách.

Bài 36. (ĐH Thái Nguyên - 2000) Một đội văn nghệ có 20 người gồm 10 nam và 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người sao cho:

a)có đúng 2 nam trong 5 người đó.

b)có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ trong 5người đó.

Giải:a)chọn 2namvà 3 nữ sẽ có $C_{10}^2.C_{10}^3 = 5400$ cách.

b)chọn 3 nam và 2 nữa sẽ có $C_{10}^3.C_{10}^2 = 5400$ cách.

chọn 4 nam và 1 nữe có $C_{10}^4.C_{10}^1 = 2100$ cách.

vây muốn chọn 5 người:có ít nhất 2 namvà ít nhất 1nữ (tức là có 2 hoặc 3 hoặc 4 nam) có:

5400 + 4500 +2100 = 12900 cách.

Bài 37: (ĐH Cần Thơ - 2000).Có 9 viên bi xanh, 5viên bi đỏ, 4viên bi vàng có kích thước khác nhau.

a) Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, trong đó có đúng 2viên bi đỏ.
b) có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi,trong đó số bi xanh băng số bi đỏ.

Giải: Chọn 2 bi đỏ C_5^2 cách, chọn 4 bi trong số 9 + 4 = 13 viên bi xanh hoặc vàng có: C_{13}^4 cách.

Vậy có $C_5^2.C_{13}^4 = \frac{5.4}{1.2}.\frac{13.12.11.10}{1.2.3.4} = 7150$ cách

b) Chọn 3trong 9 bi xanh,3 trong 5 bi đỏ có:

$$C_9^3.C_5^3 = \frac{9.8.7}{1.2.3}.\frac{5.4.3}{1.2.3} = 840 \text{ cách.}$$

Bài 38. (ĐH Quốc gia TP.HCM - 2000). Thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau gồm 5 cuốn văn học, 4 cuốn âm nhạc và 3 cuốn hội hoạ. Ông lấy ra
6 cuốn để tăng 6 học sinh A, B,C, D,E ,F mỗi em 1 cuốn.

1.Có bao nhiêu cách nếu thầy chỉ muốn sách văn học và âm nhạc.

2.Có bao nhiêu ccách để sau khi tăng, thầy vẫn con ít nhất 1cuốn văn học, ít nhất 1 cuốn âm nhạc và ít nhất 1cuốn hội hoạ.

Giải: 1. 6 học sinh được nhận 6trong 9 cuốn sách (văn học và âm nhạc),vây có 9.8.7.6.5.4 = 60480 cách.

2. giữ lại mỗi thể loại 1cuốn,6 học sinh được nhận 6 cuốn từ 9 cuốn, vậy có 9.8.7.6.5.4 = 60580 cách.

Bài 39. (Học viện Kĩ thuật quân sự - 2001).Trong số 16 học sinh có 3 học sinh giỏi, 5khá, 8trung bình.Có bao nhiêu cách chia 16 học sinh đó thành 2 tổ, mỗi tổ8 người sao cho mỗi tổ đều cộhc sinh giỏi và mỗi tổ có ít nhất hai học sinh khá.

Giải:* Cần tìm số cách chọn 8 học sinh có 1hoặc 2 giỏi,2hoặc 3khá, còn lại là trung bình(từ3 3 giỏi, 5khá, 8 trung bình):

* 1 giỏi, 2khá, 5trung bình: $C_3^1.C_5^2.C_8^5 = 3.10.56 = 1680$ cách.

* 1 giỏi, 3khá, 4trung bình: $C_3^1.C_5^3.C_8^4 = 3.10.7 = 2100$ cách.

* 2giỏi, 2khá, 4trung bình: $C_3^2.C_5^2.C_8^4 = 3.10.7 = 2100$ cách.

* 2giỏi, 3khá, 3trung bình: $C_3^2.C_5^3.C_8^3 = 3.10.56 = 1680$ cách.

Vậy có (1680 + 2100). 2 =7560 cách.

Bài 40. (ĐH Ngoại thương- 2001). Trên mặt phẳng có hình 10 cạnh lồi $A_{1.}A_2...A_{10}$. Xét các tam giác có 3 có ba đỉnh của nó là 3 đỉnh của hình 10 cạnh lồi. Hỏi trong số tam giác đó có bao nhiêu tam giác mà cả 3 cạnh của nó đều không phải là cạnh của hình 10 cạnh lồi.

Giải:*Có tất cả $C_{10}^3 = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120$ tam giác. Trong đó có 10.6 = 60 tam giác chứa đúng một cạnhcủa hình 10 cạnh (6 tam giác chứa cạnh $A_1A_2,...,$6 tam giác cạmh $A_{10}A_1$) và 10 tam giác chứa đúng 2cạnh của hình 10 cạnh. Vậy có 120 – 60 – 10=50 tam giác thoả mãn đàu bài.

Bài 41. (Học viện kỹ thuật quân sự - 1998) Có n học sinh nam và n học sinh nữ ngồi xung quanh một bàn tròn. hỏi có bao nhiêu cách săp xếp để không có 2 học sinh cùng giới ngồi cạnhh nhau.

Giải:* Đánh số các ghế từ 1 tới 2n. Nếu nam ngồi ghế lẻ, nữ ghồi ghế chẵn sẽ có $P_n = n!$ cách xếp cho nam, P_n cách xếp cho nữ, vậy có $(n!)^2$ cách xếp. đổi lại nam ngồi ngệ chẵn, nữ ngồi ngế lẻ cũng có $(n!)^2$ cách sắp xếp. Tổng cộng có cách xếp.

Bài 42. (ĐH Cần Thơ - 1999). Xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh gồm 5 nam và 5 nữ vào 2 bàn, mỗi bàn có 5 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi, nếu:

1. Các học sinh ngồi tuy ý. 2. Các học sinh nam ngồi 1một bàn.

Giải: 1. Có $P_{10} = 10!$ cách xếp học sinh ngồi tuy ý.

2. Có $P_5 = 5!$ cách xếp 5 học sinh nam vào bàn A,5 ! cách xếp năm học sinh nữ vào bàn B $\rightarrow$ có $(5!)^2$ cách xếp. Nếu nam ngồi bàn B, nữ ngồi bàn A cũng có $(5!)^2$ cách xếp. Vậy ó $2.(5!)^2 = 28800$ cách xếp.

Bài 43. (ĐH Hàng hải TPHCM - 1999). Có bao nhiêu cách xếp năm học sinh A, B,C,D, E vào một ghế dài sao cho:a) C ngồi ở chính giữa. b) A và E ngồi ở hai đầu ngế.

Giải a) C ngồi chính giữa, 4 người còn lại đổi chỗ cho nhau nên có $P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$ cách xếp.

b)A và E có 2 cách ngồi ở hai đầu ghế, 3 người còn lại đổi chỗ cho nhau, vậy có $2.P_3 = 2.(1.2.3) = 12$ cách.

Nếu yêu cầu thoả mãn cùng lúc hai điều kiện a) và b) thì có 1.2.2 =4 cách

Bài 44. (ĐH Luật Hà Nội - 1999). Một đoàn tàu có ba toa chở khách là toa I, toa II, toa III. Trên sân ga có bốn hành khách chuẩn bị đi tàu. Biết rằng mỗi toa ít nhất có 4 chỗ trống
a) Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên 3 toa tàu đó.
b) Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên tàu để có 1 toa có 3 trong 4 vị khách nói trên.
Giải: Cả 3 khách lên toa I, có 1 cách.
Có 3 khách lên toa I, khách thứ 4 lên toa II hoặc III, có $2.C_4^3$ cách.
Có 2 khách lên toa I, C_4^2 cách, 2 cách còn lại có 4 cách chọn (cùng lên 1 toa II hoặc III, mỗi người lên 1 toa II hoặc III) vậy có 4. C_4^2 cách.
Vì có 4 khách lên 3 toa tau nên ít nhất có 1 toa có 2 khách trở lên. Giả sử đó là toa I. Lập luận trên cho thấy có $(1+2.C_4^3+4.C_4^2).3=99$ cách (do vai trò các toa như nhau).
Bài 45.(ĐH Cần Thơ - 2001). Một nhóm gồm 10 học sinh: 7 nam và 3 nữ. Có bao nhiêu cách sắp xếp 10 học sinh trên thành một hành dọc sao cho 7 học sinh nam đứng liền nhau.
Giải: Đánh số các vị trí từ 1 đến 10. Có 4 bốn trường hợp các học sinh nam đứng liền nhau (từ 1 đến 7, từ 2 đến 8, từ 3 đến 9, từ 4 đến 10). Trong mỗi trường hợp, 3 nữ sinh có 3! cách hoán vị, 7 nam sinh có 7! Cách hoán vị. Vậy có 4.3!.7! =120960 cách sắp xếp.
Bài 46. (Học viện kỹ thuật quân sự - 1997). Đa thức $P(x)=(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+...+20(1+x)^{20}$ được viết lại dưới dạng $P(x)=a_0+a_{1.}x+a_{2.}x^{2+}...+n_{20}.x^{20}$ .Tìm a_{15}.
Giải:* Hệ số của x^{15} là
$n_{15}=15.C_{15}^{15}+16.C_{16}^{15}+17.C_{17}^{15}+18.C_{18}^{15}+19.C_{19}^{20}+20.C_{20}^{15}$
$=15.C_{15}^{0}+16.C_{16}^{1}+17.C_{17}^{2}+18.C_{18}^{3}+19_{19}^{4}+20.C_{20}^{5}$
$$=16+16.16+17.\frac{17.16}{1.2}+18\frac{18.17.16}{1.2.3}+19\frac{19.18.17.16}{1.2.3.4}+20\frac{20.19.18.17.16}{1.2.3.4.5}=400995.$$
Bài 47. (ĐHKinh tế quốc dân - 1997).Tìm số hạnh không chứa x trong khai triển Niutơn của $(x+\frac{1}{x})^{12}$.
Giải:★ Theo khai triển Niutơn. $(x^3+xy)^{15}=...+C_{15}^k.(xy)^{15-k}+...=...+C_{15}^k.x^{2k+15}.y^{15-k}+...$ theo giả thuyết thì 25= 2k + 15, 10 = 15 – k →k =5→ hệ số của $x^{25}.y^{10}$ là $C_{15}^5=\frac{15!}{5!10!}=3003$.
Bài 48. (ĐH Sư phạm Hà Nội - 2000). Biết tổng các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2+1)^n$ bằng 1024,hãy tìm hệ số a (a là số tự nhiên) của hố hạng ax^{12} trong khai triển đó.
Giải
★ $(x^2+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.x^{2k}$. Thay x=1 được 1024 = $\sum_{k.o}^{n}C_n^k=n=C_{10}^6=210$.
Bài 49. (ĐH Sư phạm Hà Nội - 2000). Trong khai triển nhị thức $(x.\sqrt[3]{x}+x^{-28/15})^n$
hãy tìm số hạng không phụ thuộc x, biết rằng $C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=79(1)$.
Giải ★ ĐK: n-2 $\ge 0 \leftrightarrow$ n$\ge$ 2.
$(1)\to 1+n+\frac{n.(n-1)}{2}=79\to n=12$, loại n= -13 <2. Có
$(x.\sqrt[3]{x}+x^{-28/15})^{12}=...+C_{12}^k.(x^{4/3})^k.(x^{-18/15})^{12-k}+...=4C_{12}^k.x^{48.k/15-112/5}+...$
Số không phụ thuộc x $\frac{48k}{15}-\frac{112}{5}=0\leftrightarrow k=7$
Số không phụ thuộc x là $C_{12}^7=792$.
Bài 50. (Học viện kỹ thuật quân sự - 2000). Khai triển $P(x)=(1+2x)^{12}$ thành dạng
$a_0+a_1x^1+a_2x^2+...+a_{12.}x^{12}$. Tìm max $(a_1.a_2...,a_{12})$
Giải

$P(x)=(1+2x)^{12}=\sum_{k=0}^{12}a_k.x^k$ trong đó $a_k=C_{12}^k.2^k$. Giả sử $a_1<a_{k.1}$ <> $\dfrac{12!2^k}{k!(12-k)!}<\dfrac{12!2^{k+1}}{(k+1)!(11-k)}$ <> $k<\dfrac{23}{3}$.

Suy ra $a_0<a_1<a_2<...<a_7<a_8>a_9>a_{10}>a_{11}>a_{12}$.

Vì $a_7=\dfrac{12!2^2}{7!5!}<\dfrac{12!2^8}{8!4!}=a_8\leftrightarrow\dfrac{1}{5}<\dfrac{2}{8}$. Vậy max $(a_1,a_2,...,a_{12})=a_8=126720$

Bài 51. (ĐH Thủy lợi - 2000). cho đa thức $P(x)=(1+x)^9+(1+x)^{10}+...+(1+x)^{14}$ có dạng khai triển là $P(x)=a_0+a_1.x+a_2.x^2+...+a_{14}.x^{14}$ .tính hệ số a_9

<u>Giải</u>:★Ta có $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1.x^2+...+C_n^9+...+C_n^9.x^9+...+C_n^n.x^n$.

Từ đó suy ra

$a_9=C_9^9+C_{10}^9+C_{11}^9+C_{12}^9+C_{13}^9+C_{14}^9=3003$

Bài 52. (ĐH Sư phạm Hà Nội - 2001). Trong khai triển của $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}x\right)^{10}$ thành đa thức

$a_0+a_1.x+a_2.x^2.+...+a_{10}.x^{10},(a_k\in R)$, hãy tìm hệ số a_k lớn nhất $(0\le k\le 10)$.

Giải

★ $(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x)^{10}=\sum_{k.0}^{10}C_{10}^k(\frac{1}{3})^{10-k}(\frac{2}{3})^k.x^k$. Giả sử $a_{k-1}\le a_k\Rightarrow C_{10}^{k-1}.\dfrac{2^{k-1}}{3^{10}}\le C_{10}^k\dfrac{2^k}{3^{10}}\Leftrightarrow k\le\dfrac{22}{3}$.Vậy max$a_k$ =a_7=$\dfrac{C_{10}^7.2^7}{3^{10}}$.

Bài 53. (ĐH Bách khoa Hà Nội - 1998). Viết khai triển Niutơn của biểu thức $(3x-1)^{16}$. Tư đó chứng minh rằng $3^{16}.C_{16}^0-3^{15}.C_{16}^1+3^{14}.C_{16}^2-...+C_{16}^{16}=2^{16}$.

Giải $(3x-1)^{16}=\{3x+(-1)\}^{16}=C_{16}^0.(3x)^{16}+C_{16}^1.(3x)^{16}.(-1)^1+C_{16}^2.(3x)^{14}.(-1)^2+...+C_{16}^{16}.(3x)^0.(-1)^{16}=3^{16}.C_{16^{x^{16}}}^0-3^{15}C_{16}^1x^{15}+3^{14}.C_{16}^2x^{14}-3^{13}.C_{16}^3x^{13}+...+C_{16}^{16}$

Cho x=1 sẽ được đẳng thức phải chứng minh.

Bài 54. (ĐH Y dược TP. HCM - 2000). Với n là các số nguyên dương chứng minh hệ thức sau:

a $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$

b $C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+...+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^{4+}...+C_{2n}^{2n}$

<u>Giải</u>

★ a theo khai triển Niutơn $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1.x+C_n^2.x^2+...+C_n^n.x^n$.

Thay x=1 được $2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n$, đpcm.

b Cũng theo khai triển Niutơn $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1.x+C_{2n}^2.x^2+...+C_{2n}^{2n}.x^{2n}$.

Thay x = -1 được $0=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n}.(-1)^{2n}$.

$\to C_{2n}^1+C_{2n}^3 2n+..C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+...+C_{2n}^{2n}$. Đpcm.

Bài 55. (ĐH Hồng Đức - 2000). Cho $k_1 n$ là các số tự nhiên và $5\le k\le n.$ Chứng minh

$C_5^0.C_n^k+C_5^1.C_n^{k-1}+...C_5^5.C_5^{k-5}=C_{n+5}^k$

<u>Giải</u> Để thấy rằng $(1+x)^5.(1+x)^n=(1+x)^{5+n}$, và: $M=(1+x)^5=C_5^0+C_5^1.x+C_5^2.x^2+C_5^3.x^3+C_5^4.x^4+C_5^5.x^5$.

$N=(1+x)^n=C_n^0+C_n^1.x+C_n^2.x^2+...C_k^k.x^k+...+C_n^n.x^n$.

$P=(1+x)^{5+n}=C_{5+n}^1+C_{5+n}^2.x+...+C_{5+n}^k.x^k+...+C_{5+n}^{5+n}.x^{5+n}$.

Nhận thấy C_{5+n}^k là hệ số của x^k trong P. Vì P =M.N mà số hạng chứa x^k trong M.N là

$C_5^n.C_n^k.x^k+C_5^1.x.C_n^{k-1}.x^{k-1}+...+C_5^5.x^5.C_n^{k-5}.x^{k-5}$ nên $C_{5+n}^k=C_5^0.C_n^k+C_5^1.C_n^{k-1}+...+C_5^5.C_n^{k-5}$(đpcm).

Bài 56. (ĐH Sư phạm Vinh - 2001). CMR

$C_{2001}^0+3^2.C_{2001}^2+3^4.C_{2001}^4+...+3^{2000}.C_{2001}^{2000}=2^{2000}.(2^{2001}-1)(1)$

<u>Giải</u>

★ VP (1) = $4^{2001}-2^{2001}=(3+1)^{2001}+(-3+1)^{2001}$ do đó từ hai khai triển Niutơn là:

$(x+1)^{2001}=C_{2001}^0+C_{2001}^1.x+C_{2001}^2+...+C_{2001}^{2001}.x^{2001}(2)$

$(-x+1)^{2001}=C_{2001}^{0}-C_{2001}^{1}.x+C_{2001}^{2}.x^{2}+...+C_{2001}^{2001}.x^{2001}(3)$. Cộng lại rồi thay x = 3 sẽ được (1).

Bài 57. (ĐH Hàng Hải - 2001). CMR $C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}.3^{2}+C_{2n}^{4}.3^{4}+...+C_{2n}^{2n}.3^{2n}=2^{2n-1}.(2^{2n}+1)(1)$

Giải ★Theo khai triển Niutơn $(1+x)^{2n}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}.x+C_{2n}^{2}.x^{2}+...+C_{2n}^{2n}.x^{2n}$

ta có $(1+3)^{2n}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}.3+C_{2n}^{2}.3^{2}+...+C_{2n}^{2n}.3^{2n}(3)$

(2)+(3): $4^{2n}+2^{2n}=2.(C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}.3^{2}+C_{2n}^{4}.3^{4}+...+C_{2n}^{2n}.3^{2n})\rightarrow(1)$.

Bài 58. (ĐH Đà Lạt - 2001). CMR với mọi số x: $x^{n}=\frac{1}{2^{n}}.\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}.(2x-1)^{k}$, với n là số tự nhiên.

Giải ★Đặt X = 2x - 1 thì phải chứng minh $(\frac{X+1}{2})^{n}=\frac{1}{2^{n}}.\sum_{k=0}^{n}C.X^{k}(1)$

$(1)\Leftrightarrow(X+1)^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}.X^{k}(2)$

(2) Chính là công thức khai triển Niutơn. Vậy suy ra đpcm.

Bài 64. (ĐHDL Phương Đông - 1996). Chứng minh rằng với mọi k,n$\in Z^{\bullet}$ thỏa mãn $3\le k\le n$, ta đều có: $C_{n}^{k}+3.C_{n}^{k-1}+3.C_{n}^{k-2}+3.C_{n}^{k-3}=C_{n+3}^{k}$

Giải: Áp dụng liên tiếp công thức $C_{n}^{m}=C_{n-1}^{m}+C_{n-1}^{m}$ để tách một số hạng thành hai số hạng sẽ

$C_{n+3}^{k}=C_{n+2}^{k}+C_{n+2}^{k-1}$

được: $=(C_{n+1}^{k}+C_{n+1}^{k-1})+(C_{n+1}^{k-1}+C_{n+1}^{k-2})$

$(C_{n}^{k}+C_{n}^{k-1})+(C_{n}^{k-1}+C_{n}^{k-2})+(C_{n}^{k-1}+C_{n}^{k-2})(C_{n}^{k-2}+C_{n}^{k-3})$

Bài 65. (Học viện Công nghệ bưu chính viên thông - 1998). Tìm các số nguyên, dương x,y thỏa mãn: $\frac{C_{x+1}^{y}}{6}+\frac{C_{x}^{y+1}}{5}+\frac{C_{x}^{y-1}}{2}$.

Giải ĐK: $y\le x+1; y+1\le x$

$5.C_{x+1}^{y}=6.C_{x}^{y+1}\leftrightarrow\frac{5(x+1)!}{y!(x+1-y)!}=\frac{6x!}{(y+1)!(x-y-1)}\leftrightarrow$

$5(y+1).(x+1)=6(x-y).(x-y+1)(1)$

Tương tự: $2.C_{x}^{y+1}=5.C_{x}^{y-1}\leftrightarrow2(x-y).(x-y+1)=5y.(y+1)(2)$

Vì cũng bằng $6(x-y).(x-y+1)$ nên $5.(y+1).(x+1)=15y.(y+1)\leftrightarrow x+1=3y(3)$.

Thay (3) vào (2) được $8y^{2}-4y=5y^{2}+5y\leftrightarrow y=3$, suy ra x =8. Vậy x =8, y =3.

Bài 66. (Học viện Ngân hành, phân biệt TP.HCM - 1999).Tìm các số x nguyên dương thỏa năm phương trình

$C_{x}^{1}+C_{x}^{2}+6.C_{x}^{3}=9x^{2}-14$ (1)

Giải: ★ ĐK: $x\ge3$

(1) $\leftrightarrow x+6.\frac{x.(x-1)}{2}=6.\frac{x.(x-1).(x-2)}{6}=9x^{2}-14$

$\leftrightarrow x^{2}-9x+14=0$

Vậy x = 7, loại x = 2 < 3.

Bài 67. (Cao đẳng Sư phạm TP.HCM - 1999). Tìm số tự nhiên k thỏa mãn đẳng thức $C_{14}^{k}+C_{14}^{k+2}=2.C_{14}^{k+1}$ (1).

Giải:★ ĐK: $k+2\le14\leftrightarrow k\le12$

(1) $\leftrightarrow\frac{14!}{k!(14-k)!}+\frac{14!}{(k+2)!(12-k)!}=2.\frac{14.}{(k+1)!(13-k)!}$

$\leftrightarrow k^{2}-12k+32=0$,

vậy k = 4, k = 8 đều thỏa mãn ĐK.

Bài 68.(ĐH An ninh nhân dân - 2001).CMR với n là số tự nhiên, $n\ge2, taco':\frac{1}{A_{2}^{2}}+\frac{1}{A_{3}^{2}}+...+\frac{1}{A_{n}^{2}}=\frac{n-1}{n}$

Giải

$$(1) \leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{(n-1).n}=\frac{n-1}{n} \leftrightarrow$$

$$\frac{2-1}{1.2}+\frac{3-2}{2.3}+\frac{4-3}{3.4}+...+\frac{n-(n-1)}{(n-1).n}=\frac{n-1}{n} \leftrightarrow$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n} \leftrightarrow$$

$$1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}(dpcm)$$

Bài 69. (ĐH Bách khao Hà Nội - 2001).Giải hệ PT $\begin{cases} 2.A_x^y+5.C_x^y=90 \\ 5.A_x^y-2.C_x^y=80 \end{cases}$

Giải: DK:x,y là nhưng số nguyên dương, $y \le x$.

Đặt u= $A_x^y, v=C_x^y$ để tìm được n=20, v=10.

$$\begin{cases} 20=A_x^y=\dfrac{x!}{(x-y)!} \\ 10=C_x^y \succ=\dfrac{x!}{(x-y)!y!} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ 20=\dfrac{x!}{(x-2)!} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ 20=x.(x-1) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=5(loaix=-4) \end{cases}$$

Bài 70. (ĐH Y dược TP.HCM - 1998).Chứng minh rằng với $0 \le k \le$ n $C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \le (C_{2n}^n)^2(1)$

Giải nếu dãy $u_k=C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n$ là dảy số giảm $(u_k \le u_0)$. Dãy u_k giảm $\leftrightarrow C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \le C_{2n+k-1}^n.C_{2n(k-1)}^n$

$$\leftrightarrow \frac{(2n+k)!}{n!(n+k)!}.\frac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} \le \frac{(2n+k-1)!}{n!(n+k-1)!}.\frac{(2n-k+1)!}{n!(n-k+1)!}$$

$$\leftrightarrow (2n+k)(n+k) \le (n+k)(2n-k+1)$$

$$\leftrightarrow (2n+k).(n+k)+(-2k+1) \le (n+k).[(2n+k)+(-2k+1)]$$

$$\leftrightarrow (2n+k)(-2k+1) \le (n+k)(-2k+1)$$

$$\leftrightarrow 2n+k \ge n+k$$

$$\leftrightarrow n \ge 0(dpcm)$$

Bài 71. (ĐH Hàng Hải - 1999).Giải bất phương trình $\dfrac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^4}<\dfrac{1}{14.P_3}$

<u>Giải</u> ĐK: $4 \le n+1 \leftrightarrow n \ge 3$

$$14.P_3C_{n-1}^{n-3}<A_{n+1}^4 \leftrightarrow 14.3!\frac{(n-1)!}{(n-3)!2!}<(n+1).n.(n-1).(n-2)$$

$$\leftrightarrow n^2+n-42>0 \leftrightarrow (n-6).(n+7)>0 \leftrightarrow n-6>0 \leftrightarrow n>6.$$

Kết hợp với ĐK: $n \ge 3$ được nlà số nguyên lớn hơn 6.

Bài 72. (ĐH Bách khoa Hà Nội - 2000). Giải bất phương trình $\dfrac{1}{2}.A_{2x}^2-A_x^2 \le \dfrac{6}{x}.C_x^3+10(1)$

<u>Giải</u>ĐK: $x \ge 3, x \in N$

$$(1) \leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{(2x)!}{(2x-2)!}-\frac{x!}{(x-2)!} \le \frac{6}{x}.\frac{x!}{3!(x-3)!}+10$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2}.(2x-1).2x-x.(x-1) \le (x-2)+10$$

$$\leftrightarrow x \le 4.DoDKx \ge 3n\text{enx=3,x=4}$$

Bài 73. (ĐH Quốc gia Hà Nội - 2000). Cho $0 \le k \le 2000$, k nguyên, chứng minh $C_{2001}^k+C_{2001}^{k+1} \le C_{2001}^{1000}+C_{2001}^{1001}(1)$

Giải: ★Do $C_{11}^{6} = C_{11}^{5}, C_{11}^{l} - C_{11}^{l}, ... nenS = C_{11}^{5} + C_{11}^{4} + C_{11}^{3} + C_{11}^{2} + C_{11}^{1}$
$C_{11}^{0} \to 25 = C_{11}^{0} + C_{11}^{1} + C_{11}^{2} + ... + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}(1)$

Áp dụng khai triển Niutơn $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . x^k$ với x=1, n=11 được

$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k = C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + ... + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}(2)$ Từ (1),(2) suy ra 2S=$2^{n \to S = 2^{10}} = 1024$.

Bài 74. (ĐH Sư phạm Vinh - 2001). Cho n là số nguyên dương cố định.CRM C_n^k lớn nhất nếu k là số tự nhiên lớn nhất không vượt quá $\frac{n+1}{2}$.

GiảiVì $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ va $C_n^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$ là các số dương có tỉ số $\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{n-k+1}{k} nen C_n^k > C_n^{k-1} \leftrightarrow \frac{n-k+1}{k} > 1 \leftrightarrow k < \frac{n+1}{2}$. Từ đó suy ra đpcm.

Bài 75. (ĐH An ninh - 2001). Tìm các số âm trong dãy số $X_{11.} X_{2n} ... X_n ...$ với $X_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n} (n = 1,2,3,...)$

Giải:

$x_n < 0 \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{n!(n+2)!} - \frac{143}{4.n1!} < 0 \Leftrightarrow (n+3).(n+4) - \frac{143}{4} < 0 \Leftrightarrow 4n^2 + 28n - 95 < 0 \Leftrightarrow -\frac{19}{2} < n < \frac{5}{2}$.

$V\hat{a}y n = 1; n = 2 nen x_1 = -\frac{63}{4}; x_2 = -\frac{23}{8}$

là các số phải tìm.

Bài 76. (ĐH Quốc gia Hà Nội - 1997). Tính tổng $S = C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}$

Giải Do $C_{11}^6 = C_{11}^5 . C_{11}^l - C_{11}^1 ... nen S = C_{11}^5 + C_{11}^4 + C_{11}^3 + C_{11}^2 + C_{11}^1 + C_{11}^0 \to$
$2S = C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + ... + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}(1)$

Áp dung khai triẻn Niutơn (x+1)^n=$\sum_{k=o}^{n} C_n^k . x^k$ với x=1,n=11 được

$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{11}^k = C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + ... + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}(2)$. Từ (10,(2) 2s= $2^n \to S = 2^{10} = 1024$.

Bài 77. (ĐH Sư phạm TP.HCM - 2001). Cho A là tập hợp có 20 phần tử
a) Có bao nhiêu tập hợp con của A
b) Có bao nhiêu tâp hợp con khác rỗng của A mà số phần tử là số chẵn.

Giải:
★ a) Số tập hợp con của A có k phần tử $(0 \le k \le 20)$ là số cách chọn ra k phần tử (không kể thứ tự) từ 20 phần tử đã cho : C_{20}^k.

Vậy tập hợp con của A là: $S = C_{20}^0 + C_{20}^1 + C_{20}^2 + ... + C_{20}^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k$

Do $(1+x)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k . x^k$ nên với x = 1 thì $(1+1)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \leftrightarrow S = C_{20}^0 + C_{20}^1 + C_{20}^2 + ... + C_{20}^{20} = 2^{20}$ (1)

b) số phần tử là chẵn tức là k chẵn, vậy số tập con khác rỗng mà số phần tử là chẵn là:
$Q = C_{20}^2 + C_{20}^4 + C_{20}^6 + ... + C_{20}^{20}$ Với x = -1 thì $(1+x)^{20} = (1-1)^{20} = C_{20}^0 - C_{20}^1 + C_{20}^2 - C_{20}^3 + ... - ... + C_{20}^{20}$ (2)

Cộng (1) với (2) được: $2(C_{20}^0 + C_{20}^2 + C_{20}^4 + ... + C_{20}^{20}) = 2^{20} \leftrightarrow 2.(C_{20}^0 + Q) = 2^{20} \leftrightarrow Q = \frac{2^{20}}{2} = C_{20}^0 = 2^{19} - 1$.

Bài 78. (ĐH Quốc gia Hà Nội - 2000). Giải PT $P_x . A_x^2 + 72 = 6.(A_x^2 + 2.P_x)$ (1). ĐS: x = 4; x =3
