CÔNG THỨC SỐ PHỨC 1.5

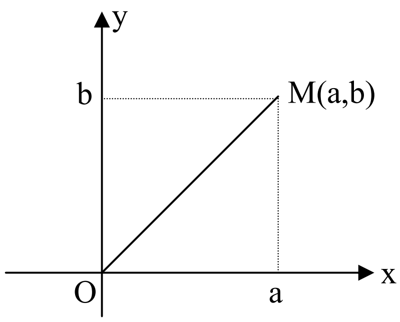
Biên soạn: **Huỳnh Văn Lượng** (0918.859.305-01234.444.305)

I. Một số vấn đề về số phức:

- Mỗi số phức đều có dạng: z = a+b.i

$$\text{Với } \begin{cases} \text{a : phần thực} \\ \text{b : phần ảo} \\ \text{i : đơn vị ảo} : i^2 = -1 \end{cases}$$

- Số phức liên hợp của z là: $\overline{z} = a - b.i$
- Môđun của số phức z là: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Lũy thừa đơn vị ảo: $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$
- Biểu diễn hình học của số phức:
  + Số phức z = a+b.i biểu diễn bởi điểm M(a;b) hoặc $\overrightarrow{OM} = (a,b)$
  + Môđun của số phức z biểu diễn bởi OM = $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
  + Ox: trục thực
  + Oy: trục ảo



II. Các phép toán trên số phức:

Cho hai số phức z=a +b.i và z' = c+d.i, ta có:

- Phép cộng: z + z' = a+c + (b+d).i
- Phép trừ: z - z' = a - c + (b-d).i
- Phép nhân: z.z' = ac-bd + (ad+bc).i
- Phép chia: $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z.\overline{z}'}{z'.\overline{z}'} = \dfrac{ac + bd + ((bc - ad)i}{c^2 + d^2}$
- Số phức liên hợp của z là: $\overline{z} = a - b.i$
- Môđun của số phức z là: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Lũy thừa đơn vị ảo: $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$
- Hai số phức bằng nhau: z = z' $\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$
- Nghịch đảo của số phức z là: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}'}{z^2}$

III. Dạng lượng giác và dạng mũ của số phức:

- Dạng lượng giác: Số phức z=a +b.i có thể viết với dạng: z = r(cosφ + i.sinφ)

Trong đó: $\begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{r};\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r}; \tan\varphi = \dfrac{b}{a} \end{cases}$

- Dạng mũ: Số phức z=a +b.i có thể viết với dạng: $z = r.e^{i\varphi}$

(với r và φ tính như trên)

IV. Công thức Moivre:

$$(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i.\sin n\varphi$$

Áp dụng cho hai số phức: z = r(cosφ + i.sinφ) và z’ = r’(cosφ’ + i.sinφ’), ta có:

- Phép nhân: z.z’ = r.r’[cos(φ +φ’)+ i.sin(φ +φ’)]
- Phép chia: z/z’ = r/r’[cos(φ -φ’)+ i.sin(φ - φ’)]

V. Căn bậc hai của số phức:

- Dạng đại số:

Giả sử căn bậc hai của số phức z=a +b.i là x+y.i, ta có:

$$\sqrt{z} = x + y.i$$
$$\Leftrightarrow z = (x + y.i)^2$$
$$\Leftrightarrow a + b.i = x^2 - y^2 + 2xyi$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên tìm được x, y và suy ra kết quả

- Dạng lượng giác: Áp dụng công thức Moivre: $z^{½} = r^{½}.[\cos(\varphi/2) + i.\sin(\varphi/2)]$

MỘT SỐ BÀI TẬP SỐ PHỨC

Vấn đề 1 : Tìm phần thực – phần ảo – biểu diễn số phức .

$\boxed{1}$ Xác định phần thực , phần ảo của các số phức sau : a) $z = -2 + 5i$ b) $z = -\sqrt{2}\,i$ c) $z = 3$ d) $z = 0$

$\boxed{2}$ Biểu diễn các số phức sau trên mặt phẳng phức .

a) $z = 3 + 2i$ b) $z = -2i$ c) $z = 3$ d) $z = -2 + 4i$ ĐS : a) $A(3;2)$ b) $B(0;-2)$ c) $M(3;0)$ d) $N(-2;4)$

$\boxed{3}$ Cho các số phức $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 2 + i, z_3 = 1 - 3i$

a) Biểu diễn các số đó trong mặt phẳng phức .

b) Viết số phức liên hợp của mỗi số phức đó và biểu diễn chúng trong mặt phẳng phức .

c) Viết số đối của mỗi số phức đó và biểu diễn chúng trong mặt phẳng phức .

Giải a) $K(3;2)$, $M(2;1)$, $N(1;-3)$.

b) $z_1 = 3 + 2i$ có số phức liên hợp là $\overline{z}_1 = 3 - 2i$, biểu diễn bởi điểm $\overline{K}(3;-2)$.

$z_2 = 2 + i$ có số phức liên hợp là $\overline{z}_2 = 2 - i$, biểu diễn bởi điểm $\overline{M}(2;-1)$.

$z_3 = 1 - 3i$ có số phức liên hợp là $\overline{z}_3 = 1 + 3i$, biểu diễn bởi điểm $\overline{N}(1;3)$.

c) $z_1 = 3 + 2i$ có số đối là $-3 - 2i$, biểu diễn bởi điểm $K'(-3;-2)$.

$z_2 = 2 + i$ có số đối là $-2 - i$, biểu diễn bởi điểm $M'(-3;-1)$.

$z_3 = 1 - 3i$ có số đối là $-1 + 3i$, biểu diễn bởi điểm $N'(-1;+3)$.

$\boxed{4}$ Cho $z = (2a - 4) + (3b + 6)i$ với $a,b \in \mathbb{R}$. Tìm điều kiện của a và b để :

a) z là số thực b) z là số ảo . $\rightarrow$ a) $b = -2$ b) $a = 2$

$\boxed{5}$ Tìm các số thực a,b sao cho $z = z'$ với từng trường hợp sau :

a) $z = (-3a - 6) + i$, $z' = 12 + (2b - 9)i$ $\rightarrow a = -6, b = 2$

b) $z = (2a - 5) - (3b - 1)i$, $z' = (2b - 1) + (3a - 5)i$ $\rightarrow a = 2, b = 0$

Vấn đề 2 : Các phép toán

$\boxed{1}$ Tính $z + z'$, $z - z'$, $z \,.\, z'$ với :

a) $z = 3+2i$, $z' = 4 + 3i$

b) $z = 2-3i$, $z' = 5 + 4i$

HD : a) $z + z' = 7+5i$, $z - z' = -1 - i$, $z \,.\, z' = 6 + 17i$

b) $z + z' = 7 + i$, $z - z' = -3 - 7i$, $z \,.\, z' = 22 - 7i$

$\boxed{2}$ Tìm nghịch đảo của các số phức sau :

a) $z = 3 + 4i$ b) $z = 1 - 2i$ c) $z = -2 + 3i$

HD : $z = a + bi \rightarrow z.\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$ a) $\frac{1}{z} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ b) $\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}i$ c) $\frac{1}{z} = \frac{-2}{\sqrt{13}} - \frac{3}{\sqrt{13}}i$

$\boxed{3}$ Thực hiện các phép tính sau :

$A = (1 - i)^2$ $B = (2 + 4i)^2$ $D = (1 + i)^3 + 13i$ $E = \dfrac{1}{(1 + i)(4 - 3i)}$ $F = \dfrac{-5 + 6i}{4 + 3i}$ $G = \overline{\dfrac{7 - 2i}{8 - 6i}}$

$H = \dfrac{1}{2 - 5i}$ $I = 1 / (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ $J = \dfrac{3 - 2i}{i}$ $K = \dfrac{3 - 4i}{4 - i}$

HD : $A = -2i, B = -12 + 16i, D = -2 + 15i, E = \frac{7}{50} - \frac{1}{50}i, F = -\frac{2}{25} + \frac{39}{25}i, G = \frac{11}{25} + \frac{29}{50}i$, $H = \frac{2}{29} + \frac{5}{29}i$

$I = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $J = -2 - 3i$ $K = \frac{16}{17} - \frac{13}{17}i$

$\boxed{4}$ Xác định phần thực và phần ảo của số phức sau :

a) $i + (2 - 4i) - (3 - 5i)$ b) $(\sqrt{2} + 5i)^2$ c) $(2 + 3i)(2 - 3i)$ d) $i(2 - i)(3+i)$

Đs : a) $-1 - 2i$ b) $-23 + 10\sqrt{2}i$ c) 20 d) $1 + 7i$

$\boxed{5}$ Cho $z = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Hãy tính : $\frac{1}{z}, \overline{z}, z^2, (\overline{z})^3, 1+z+z^2$.

HD : Vì |z| = 1 . Ta có : $\frac{1}{z} = \overline{z} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \ = z^2, (\overline{z})^3 = 1 \ , 1+z+z^2 = 0$

$\boxed{6}$ Giải các phương trình sau trên tập số phức : với ẩn $z \in$

a) $iz + 2 - i = 0$ b) $(2 + 3i)z = z - 1$ c) $(2 - i)\overline{z} - 4 = 0$ d) $(iz - 1)(z + 3i)(\overline{z} - 2+3i) = 0$ e) $z^2 + 4 = 0$

Vấn đề 3 *: Căn bậc hai và giải phương trình bậc hai*

$\boxed{1}$ Tìm các căn bậc hai của các số phức sau :

a) $z = 1$ b) $z = -9$ c) $z = -5 + 12i$ d) $z = i$ e) $z = 1+ 4\sqrt{3}i$ f) $z = 17+ 20\sqrt{2}i$ g) $z = -8 + 6i$ h) $z = 46 - 14\sqrt{3}i$. ĐS : a) Gọi w = a+bi là căn bậc hai của số phức z = 1 , tức là $w^2 = 1 \to a = \pm 1, b = 0$ $\to$ có 2 $\sqrt{\ }$ là ± 1 b) $\pm 3i$ c) $2 + 3i, -2 - 3i$ d) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ e) $2 + \sqrt{3}i, -2 - \sqrt{3}i$ f) $5 + 2\sqrt{2}i \ , -5 - 2\sqrt{2}i$ g) $1 + 3i, -1 - 3i$ h) $7 - \sqrt{3}i \ , \ -7 + \sqrt{3}i$

$\boxed{2}$ Giải các phương trình bậc hai sau trên tập số phức :

a) $z^2 = z + 1$ b) $z^2 + 2z + 5 = 0$ c) $z^2 - z + 1 = 0$ d) $z^2 + (-2+i)z - 2i = 0$ e) $ix^2 - 2(1-i)x - 4 = 0$
f) $x^2 - (5-i)z + 8 - i = 0$

HD : a) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ b) $-1 \pm 2i$ c) $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ d) $2; -i$ e) $2 \pm \sqrt{3}i$ f) $-\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{23}}{4}i$ g) $-2; -2i$ h) $2+ i \ , 3 - 2i$

Vấn đề 4 : Dạng lượng giác của số phức

$\boxed{1}$ Biểu diễn các số phức sau đây dưới dạng lượng giác

a) $z = 1 + i$ b) $z = 1 - i$ c) $z = -3$ d) $z = 5$ e) $z = i$ f) $z = -2i$ g) $z = 1 + i\sqrt{3}$ h) $z = 1 - i\sqrt{3}$

i) $z = -1 + i\sqrt{3}$ j) $z = -1 - i\sqrt{3}$ k) $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

HD : a) $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ b) $z = \sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4})$ c) $z = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$ d) $z = 5(\cos 0 + i\sin 0)$

e) $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ f) $z = 2[\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}]$ g) $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ h) $z = 2(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3})$

i) $z = 2(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ j) $z = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$ k) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

$\boxed{2}$ Tính $\cos\frac{\pi}{8}, \sin\frac{\pi}{8}$. Viết số phức sau dưới dạng lượng giác $z = 1 + (\sqrt{2} - 1)i$. HD : $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$,

$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a) \to \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, z = \sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$

$\boxed{3}$ Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) $z = -(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ b) $z = \cos\varphi - i\sin\varphi$ c) $z = -\cos\varphi + i\sin\varphi$

HD : a) $\cos(\varphi + \pi) + i\sin(\varphi + \pi)$ b) $\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$ c) $\cos(\pi - \varphi) + i\sin(\pi - \varphi)$

$\boxed{4}$ Biết số phức $z \neq 0$ có một acgumen là φ . Hãy tìm một acgumen của mỗi số phức sau : $-z, \overline{z}, -\overline{z}, \frac{1}{z}$

HD: $-z$ có acgumen $\varphi + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$; $\overline{z}$ có acgumen $-\varphi + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$; $-\overline{z}$ có acgumen $-\varphi + (2k+1)\pi$ $, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{1}{z}$ có acgumen $-\varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{5}$ Tìm một acgumen của số phức : a) $-2 + 2\sqrt{3}i$ b) $\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$ c) $\sqrt{3} - i \to$ a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) $-\frac{\pi}{6}$

$\boxed{6}$ Tính :

a) $5(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}).3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \to = 15.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.15$

b) $\dfrac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})}{\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})} \to = \frac{\sqrt{2}}{2} + i.\frac{\sqrt{6}}{6}$

$\boxed{7}$ Dùng công thức Moi-vrơ tính : a) $(1+i)^5$ b) $(\sqrt{3} - i)^6$ c) $[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})]^7$

d) $(1 + \cos\alpha + i.\sin\alpha)^n, n \in \mathbb{N}$.

HD : a) $-4(1+i)$ b) -64 c) $-4\sqrt{6} - i.4\sqrt{2}$ d) $2^n \cos^n\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{n\alpha}{2} + i.\sin\frac{n\alpha}{2})$