

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1. (3,0 điểm) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho
- 2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 , biết $f''(x_0) = -1$

Câu 2. (3,0 điểm) : 1) Giải phương trình $\log_2(x-3) + 2\log_4 3 \cdot \log_3 x = 2$

2) Tính tích phân $I = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1)^2 e^x dx$.

3) Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng

-2

Câu 3. (1,0 điểm) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Góc giữa đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a .

II. PHẦN RIÊNG – PHẦN TỰ CHỌN (3,0 điểm)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc phần 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu 4.a (2,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(2;2;1)$, $B(0;2;5)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x - y + 5 = 0$

- 3) Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua A và B
- 4) Chứng minh rằng (P) tiếp xúc với mặt cầu có đường kính AB

Câu 5.a. (1,0 điểm) Tìm các số phức $2z + \bar{z}$ và $\frac{25i}{z}$, biết $z = 3 - 4i$

2. Theo chương trình Nâng cao

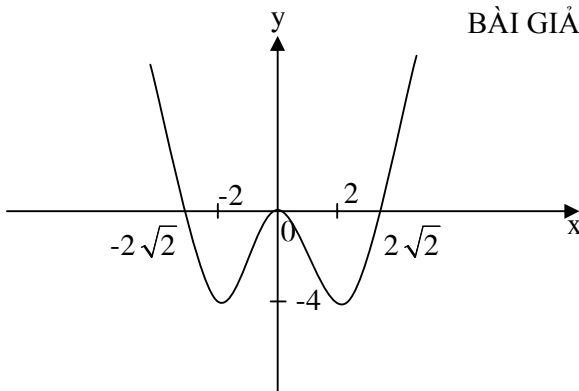
Câu 4.b. (2,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2;1;2)$ và đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$

- 1) Viết phương trình của đường thẳng đi qua O và A
- 2) Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và đi qua O. Chứng minh Δ tiếp xúc với (S)

Câu 5.b. (1,0 điểm) Tìm các căn bậc hai của số phức $z = \frac{1+9i}{1-i} - 5i$

BÀI GIẢI

Câu 1:
Đồ thị :



2. $f''(x_0) = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 4 = -1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1 \Rightarrow y(\pm 1) = -\frac{7}{4}$

Hệ số góc của các tiếp tuyến là $y'(-1) = 3$ và $y'(1) = -3$, phương trình tiếp tuyến là:

$$y + \frac{7}{4} = 3(x + 1) \text{ hay } y + \frac{7}{4} = -3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x + \frac{5}{4} \text{ hay } y = -3x + \frac{5}{4}$$

Câu 2:

- 1) Với Đk : $x > 3$, phương trình đã cho tương đương :
 $\log_2(x-3) + \log_2 3 \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2(x-3) + \log_2 x = 2$
 $\Leftrightarrow \log_2 x(x-3) = 2 \Leftrightarrow x(x-3) = 2^2 \Leftrightarrow x = -1$ (loại) hay $x = 4$
 Do đó nghiệm của phương trình đã cho là $x = 4$.

2) $I = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1)^2 e^x dx$ Đặt $t = e^x - 1 \Rightarrow dt = e^x dx$

$$t(0) = 0, t(\ln 2) = 1 \Rightarrow I = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

3) $f'(x) = \frac{1-m+m^2}{(x+1)^2} > 0, \forall m$. Vậy f đồng biến trên $[0; 1]$ với mọi m .

$$\Rightarrow \text{Minf}(x) = f(0) = -m^2 + m,$$

do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -m^2 + m = -2 \Leftrightarrow m = -1$ hay $m = 2$

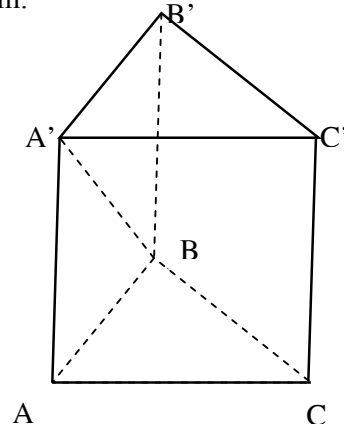
Câu 3 : Góc $A'BA = 60^\circ$ là góc của $A'B$ và mặt phẳng ABC

$$\Delta ABC \text{ vuông cân tại } B \text{ nên } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a^2. \Delta A'AB$$

là nửa tam giác đều nên có cạnh $A'B = 2AB = 2a$

$$\Rightarrow AA' = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy thể tích hình lăng trụ} = \frac{1}{2} a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$



II. PHẦN RIÊNG – PHẦN TỰ CHỌN (3,0 điểm)

Câu 4.a

1. Phương trình đường thẳng qua A có vectơ chỉ phương là \overline{AB} :
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

2. Trung điểm I của AB là $I = (1, 2, 3)$, và $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{5}$

$$IH = \left| \frac{2 \cdot 1 - 2 + 5}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} \right| = \sqrt{5} = R$$

Vậy mặt phẳng (P) tiếp xúc với hình cầu có đường kính là AB.

Câu 5.a : $z = 3 - 4i \Rightarrow \bar{z} = 3 + 4i$

$$2z + \bar{z} = 2(3 - 4i) + 3 + 4i = 9 - 4i$$

$$\frac{25i}{z} = \frac{25i}{3 - 4i} = \frac{25i(3 + 4i)}{3^2 + 4^2} = -4 + 3i$$

Câu 4.b: 1/ OA qua O và VTCP $\overline{OA} = (2; 1; 2)$

$$\text{Phương trình chính tắc OA : } \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

$$2/ \quad R = OA = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

$$\text{Phương trình mặt cầu (S) tâm A: } (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

$$\Delta \text{ qua } M(1; 3; 0) \text{ VTCP } \vec{a} = (2; 2; 1); \overline{AM} = (-1; 2; -2) \Rightarrow [\vec{a}, \overline{AM}] = (-6; 3; 6)$$

$$d(A, \Delta) = \frac{|\vec{a}, \overline{AM}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{36 + 9 + 36}}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{9}{3} = R. \text{ Vậy } \Delta \text{ tiếp xúc (S)}$$

Câu 5.b: $z = \frac{-4 + 4i}{1 - i} = -4 + 4i^2 \Rightarrow$ căn bậc 2 của z là $\pm 2i$