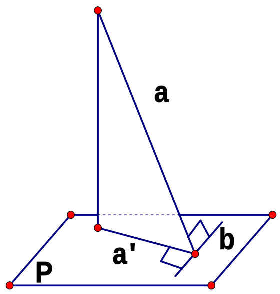
MỘT SỐ TÍNH CHẤT
VỀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC-THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Dạng toán 1: **Chứng minh hai đường thẳng vuông góc**

Cách 1: $\begin{cases} d \perp (P) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp a$



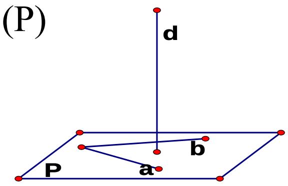
Cách 2: *Áp dụng định lí ba đường vuông góc*: đường thẳng a không vuông góc với mp(P), đường thẳng b nằm trong (P) và a' là hình chiếu của a lên (P). Khi đó: $b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$

Cách 3: $\begin{cases} a // (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp a$

Cách 4: $\begin{cases} a // b \\ d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp a$

Bài toán 2: **Chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P)**

Cách 1: Ta chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a và b cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P)

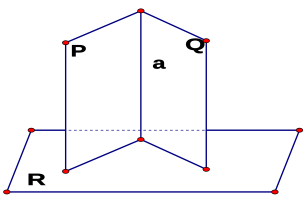


$\begin{cases} d \perp a, d \perp b \\ a, b \subset mp(P) \Rightarrow d \perp mp(P) \\ a, b \text{ cat nhau} \end{cases}$

Cách 2: $\begin{cases} d // a \\ (P) \perp a \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$

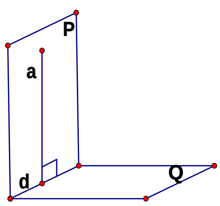
Cách 3: $\begin{cases} (P) // (Q) \\ d \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$

Cách 4: Ta chứng minh d là giao tuyến của hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng (P): *" Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba".*



$\begin{cases} (Q) \cap (R) = d \\ (Q) \perp (P) \qquad \Rightarrow d \perp (P) \\ (R) \perp (P) \end{cases}$

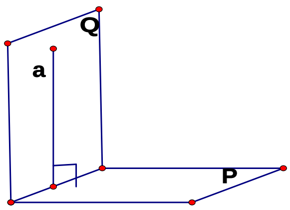
Cách 5: Áp dụng tính chất: "*Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng d nào nằm trong (P) và vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q)".*



$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \Rightarrow a \perp (Q) \\ a \subset (P), a \perp d \end{cases}$

<u>Bài toán 3</u>: **Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc**

Để chứng mình mp (Q) vuông góc với mp(P), ta chứng minh trong (Q) có một đường thẳng a vuông góc mp(P).

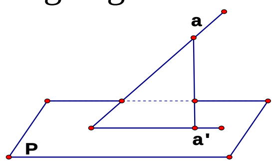


$$\begin{cases} a \perp mp(P) \\ a \subset mp(Q) \end{cases} \Rightarrow mp(Q) \perp mp(P)$$

<u>Bài toán 4</u>: **Xác định góc giữa đường thẳng a và mp(P)**

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc nhọn hoặc vuông (không bao giờ tù)

<u>Cách 1</u>: Là góc giữa a và hình chiếu a' của a lên (P)



$$(a,(P)) = (a,a')$$

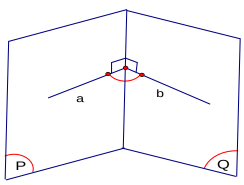
<u>Cách 2</u>: Là góc giữa a và đường thẳng b, với b//(P)

<u>Bài toán 5</u>: **Xác định góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q)**

<u>Cách 1</u>: là góc giữa 2 đường thẳng nằm trong 2 mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng tại 1 điểm.

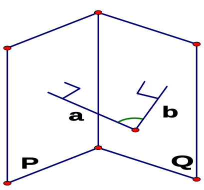
- Xác định giao tuyến d của (P) và (Q)
- Xác định đường thẳng a thỏa mãn: $a \subset (P)$, $a \perp d$
- Xác định đường thẳng b thỏa mãn: $b \subset (Q)$, $b \perp d$

Khi đó góc giữa (P) và (Q) là góc giữa a và b



$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (P), a \perp d \\ b \subset (Q), b \perp d \end{cases} \Rightarrow ((P),(Q)) = (a,b)$$

<u>Cách 2</u>: Là góc giữa hai đường thẳng a và b, với $a \perp (P)$ và $b \perp (Q)$



$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow ((P),(Q)) = (a,b)$$

<u>Bài toán 6</u>: **Xác định khoảng cách:**

✍ Khoảng cách từ M đến (P): d(M,(P)) = MH (với H là hình chiếu của M lên (P))

✍ Khoảng cách giữa đường thẳng a và mp (P) song song: $d(a,(P)) = d(M,(P))$ (với M là điểm tùy ý trên đường thẳng a)

✍ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q): d((P),(Q)) = d(M, (Q)) (với M là điểm tùy ý trên mặt phẳng (P)

✍ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b:

Cách 1: $\begin{cases}(P)\supset b\\(P)//a\end{cases}\Rightarrow d(a,b)=d(a,(P))$

Cách 2: $\begin{cases}(P)\supset a\\(Q)\supset b\\(P)//(Q)\end{cases}\Rightarrow d(a,b)=d((P),(Q))$

Cách 3: Xác định đường vuông góc chung của a và b

$$\begin{cases}d\perp a=M\\d\perp b=N\end{cases}$$

Ta nói:

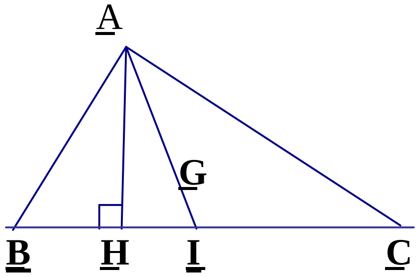
d: đường vuông góc chung của a và b

MN: đoạn vuông góc chung của a và b

TÍNH CHAT CÔ BAN CỦA MỘT SỐ HÌNH:

1. Tam giac

✍ **Tam giac bất kỳ**

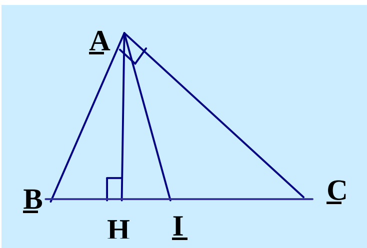


✶ $S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}AH.BC$

✶ $S=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$

✶ $AG=\frac{2}{3}AI$ (G trọng tâm, I là trung điểm BC)

✍ **Tam giac vuong:**



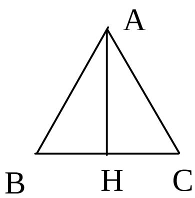
✶ $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$; $BA^2=BH.BC$

✶ $BC^2=AB^2+AC^2$ (Pitago)

✶ $IA=IB=IC=\frac{1}{2}BC$ (I là trung điểm BC)

✶ $S=\frac{1}{2}AB.AC$

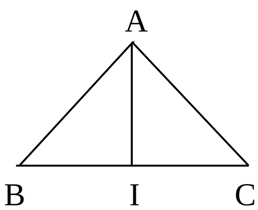
✍ **Tam giac ñeu cạnh a:**



✶ **Đường cao:** $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

✶ **Diện tích:** $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

✍ **Tam giac cân tại A:**



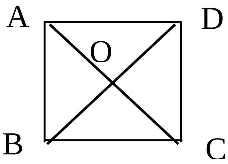
✶ $AB=AC$

✶ **AI: trung tuyến, vừa là đường cao, phân giác.**

✶ $S=\frac{1}{2}AI.BC$

2. Tứ giac

✍ **Hình vuong cạnh a:**

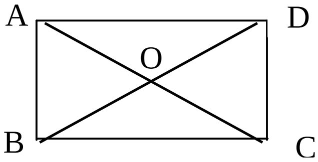


✶ **Đường chéo:** $AC = BD = a\sqrt{2}$

✶ **Diện tích:** $S = a^2$ **= cạnh x cạnh**

✶ $AC \perp BD$; $OA = OB = OC = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

✍ **Hình chö nhat:**

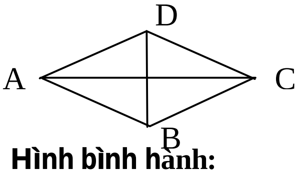


✶ **Đường chéo:** $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$

✶ **Diện tích:** $S = AB.AD$ **= dài x rộng**

✶ $OA = OB = OC = OD$

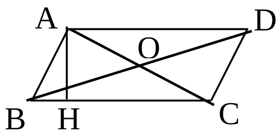
✍ **Hình thoi:**



✶ $S = \dfrac{1}{2}AC.BD$

✶ $AC \perp BD$; $OA = OC$, $OB = OD$

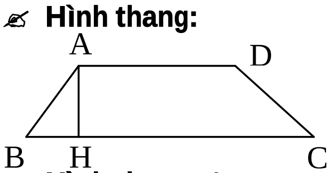
✍ **Hình bình hanh:**



✶ $S = \dfrac{1}{2}AH.BC$

✶ $OA = OC$, $OB = OD$

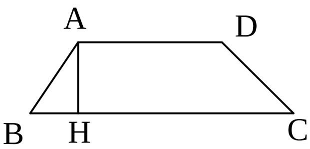
✍ **Hình thang:**



✶ **Đáy: AD//BC**

✶ $S = \dfrac{1}{2}(AD + BC).AH$

✍ **Hình thang cân:**

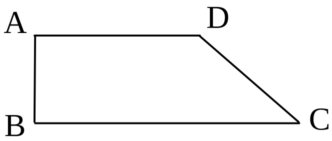


✶ **Đáy: AD//BC, cạnh bên: AB = CD**

✶ **Đường chéo: AC = BD**

✶ $S = \dfrac{1}{2}(AD + BC).AH$

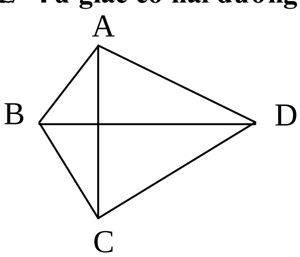
✍ **Hình thang vuông:**



✶ **Đáy: AD//BC,** $AB \perp BC$

✶ $S = \dfrac{1}{2}(AD + BC).AB$

✍ **Tứ giác có hai đường chéo vuông góc:**



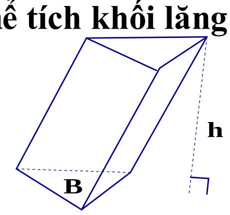
✶ $AC \perp BD$

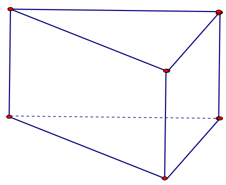
✶ $S = \dfrac{1}{2}AC.BD$

----------oOo-----------

THE TÍCH KHOI ÑA DIEN

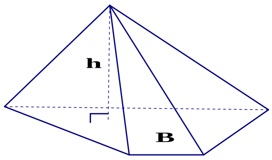
1. Thể tích khối lăng trụ:





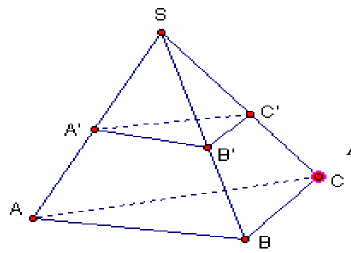
$\boxed{V = B.h = S_{đáy}.cao}$ với $\begin{cases} B : \text{dien tích ñay} \\ h : \text{chieu cao} \end{cases}$

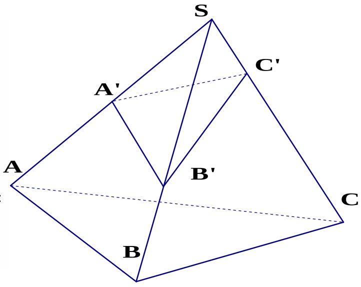
2. Thể tích khối chóp, tứ diện:



$$\boxed{V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}S_{đáy}.cao}\quad \text{với}\ \begin{cases} B: \text{dien tích ñay} \\ h: \text{chieu cao} \end{cases}$$

3. Tỉ số thể tích tứ diện (khối chóp tam giác): Cho khối chóp S.ABC (hoặc tứ diện SABC) và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có:





$$\boxed{\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}}=\frac{SA}{SA'}\frac{SB}{SB'}\frac{SC}{SC'}}$$

4. Mot so phöông phap tính the tích khoi ña dien

a) Tính the tích bang cong thöc

- Tính cac yeu to can thiet: ño dai canh, dien tích ñay, chieu cao, ...
- Sö dung cong thöc ñe tính the tích.

b) Tính the tích bang cach chia nho

Ta chia khoi ña dien thanh nhieu khoi ña dien nho ma co the de dang tính ñöôc the tích cua chung. Sau ño, cong cac ket qua ta ñöôc the tích cua khoi ña dien can tính.

c) Tính the tích bang cach bo sung

Ta co the ghep them vao khoi ña dien mot khoi ña dien khac sao cho khoi ña dien them vao va khoi ña dien môi tao thanh co the de tính ñöôc the tích.

d) Tính the tích bang cong thöc tæ so the tích: áp dụng công thức mục 3

Chú ý: 1/ Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

2/ Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên đều bằng nhau (hoặc có đáy là đa giác đều, hình chiếu của đỉnh trùng với tâm của đáy).

5. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện:

✍ **Hình chóp S.ABCD có IA = IB = IC = ID = IS:** tâm I và bán kính R = IS

✍ **Hình chóp bất kỳ có đỉnh là S**

- Xác định d là trục của đường tròn ngoại tiếp mặt đáy (tức là d vuông góc mặt đáy và cách đều các đỉnh của mặt đáy)
- Vẽ mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên
- d cắt (α) tại I thì I là tâm và R = SI là bán kính của mặt cầu

✍ **Tứ diện có hai đỉnh cùng nhìn một đoạn thẳng dưới góc vuông**: Tứ diện ABCD có ABD = ACD = 90^o thì tâm I là trung điểm của AD và bán kính R = IA.

GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Để giải được các bài toán hình không gian bằng phương pháp tọa độ ta cần phải chọn hệ trục tọa độ thích hợp. Lập tọa độ các đỉnh, điểm liên quan dựa vào hệ trục tọa độ đã chọn và độ dài cạnh của hình.

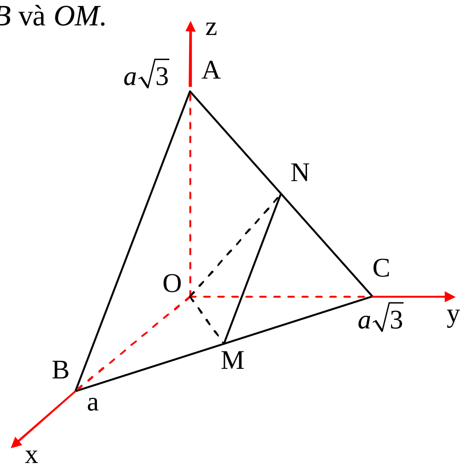
Bước 1: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz thích hợp. (Quyết định sự thành công của bài toán)
Bước 2: Xác định tọa độ các điểm có liên quan.
Bước 3: Sử dụng các kiến thức về tọa độ để giải quyết bài toán.

Các dạng toán thường gặp:

- Định tính: Chứng minh các quan hệ vuông góc, song song, …
- Định lượng: Độ dài đoạn thẳng,, góc, khoảng cách, tính diện tích, thể tích, diện tích thiết diện, …

1. Hình chóp tam giác, tứ diện:

Ví dụ 1: Cho tứ diện *OABC* có đáy *OBC* là tam giác vuông tại *O*, *OB*=*a*, *OC*= $a\sqrt{3}$, (*a*>0) và đường cao *OA*= $a\sqrt{3}$. Gọi *M* là trung điểm của cạnh *BC*. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *OM*.



Cách 1:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó *O*(0;0;0),

$A(0;0;a\sqrt{3})$; $B(a;0;0)$, $C(0;a\sqrt{3};0)$,

$M\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, gọi *N* là trung điểm của *AC* $\Rightarrow N\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

MN là đường trung bình của tam giác *ABC* $\Rightarrow AB\,//\,MN$

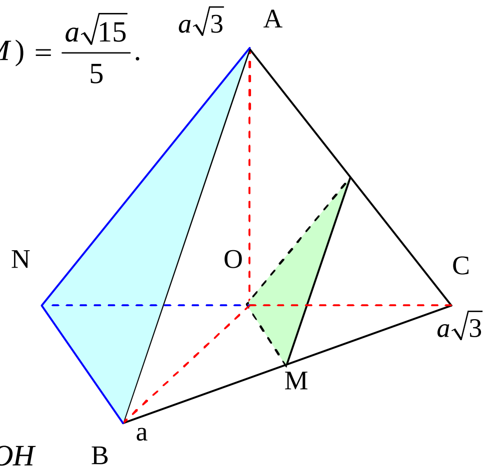
$\Rightarrow AB\,//(OMN) \Rightarrow d(AB;OM) = d(AB;(OMN)) = d(B;(OMN))$.

$\overrightarrow{OM} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $\overrightarrow{ON} = \left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}] = \left(\dfrac{3a^2}{4};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3};1;1\right) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\vec{n}$, với $\vec{n} = (\sqrt{3};1;1)$.

Phương trình mặt phẳng (*OMN*) qua *O* với vectơ pháp tuyến $\vec{n}: \sqrt{3}x + y + z = 0$

Ta có: $d(B;(OMN)) = \dfrac{\left|\sqrt{3}.a+0+0\right|}{\sqrt{3+1+1}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Vậy, $d(AB;OM) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.



Cách 2:

Gọi *N* là điểm đối xứng của *C* qua *O*.

Ta có: *OM* // *BN* (tính chất đường trung bình).

$\Rightarrow OM\,//\,(ABN)$

$\Rightarrow d(OM;AB) = d(OM;(ABN)) = d(O;(ABN))$.

Dựng $OK \perp BN$, $OH \perp AK$ $(K \in BN;\ H \in AK)$

Ta có: $AO \perp (OBC)$; $OK \perp BN \Rightarrow AK \perp BN$

$BN \perp OK;\ BN \perp AK \Rightarrow BN \perp (AOK) \Rightarrow BN \perp OH$

$OH \perp AK;\ OH \perp BN \Rightarrow OH \perp (ABN) \Rightarrow d(O;(ABN) = OH$

Từ các tam giác vuông *OAK*; *ONB* có:

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{5}{3a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Vậy, $d(OM;AB) = OH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

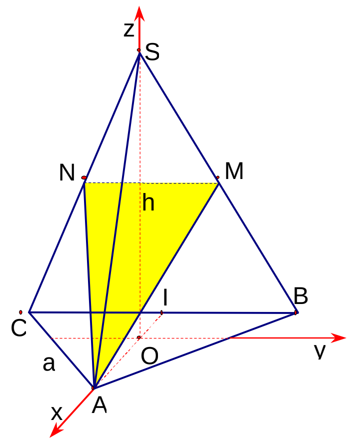
Ví dụ 2: (Trích đề thi Đại học khối A – 2002). Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có độ dài cạnh đáy là *a*. Gọi *M*, *N* là trung điểm *SB*, *SC*. Tính theo *a* diện tích Δ*AMN*, biết (*AMN*) vuông góc với (*SBC*).

Hướng dẫn giải

Gọi O là hình chiếu của S trên (*ABC*), ta suy ra O là trọng tâm ΔABC. Gọi *I* là trung điểm của *BC*, ta có:

$AI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Trong mặt phẳng (*ABC*), ta vẽ tia *Oy* vuông góc với *OA*. Đặt *SO* = *h*, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được:



O(0; 0; 0), *S*(0; 0; h), $A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right) \Rightarrow I\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};0;0\right)$, $B\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\dfrac{a}{2};0\right)$,

$C\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};-\dfrac{a}{2};0\right)$, $M\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{12};\dfrac{a}{4};\dfrac{h}{2}\right)$ và $N\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{12};-\dfrac{a}{4};\dfrac{h}{2}\right)$.

$\Rightarrow \vec{n}_{(AMN)} = \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right] = \left(\dfrac{ah}{4};0;\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right)$,

$\vec{n}_{(SBC)} = \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right] = \left(-ah;0;\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$

$(AMN)\perp(SBC)\Rightarrow \vec{n}_{(AMN)}.\vec{n}_{(SBC)}=0\Rightarrow h^2=\dfrac{5a^2}{12}\Rightarrow S_{\Delta AMN}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right]\right|=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

2. Hình chóp tứ giác

a) Hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là hình vuông (hoặc hình chữ nhật). Ta chọn hệ trục tọa độ như dạng tam diện vuông.

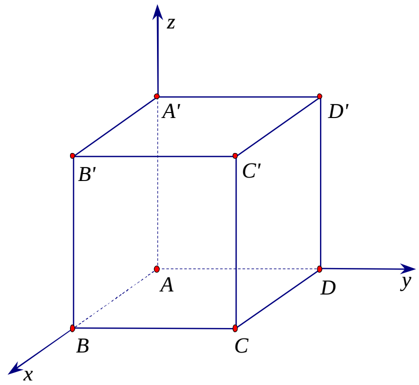
b) Hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông (hoặc hình thoi) tâm O đường cao *SO* vuông góc với đáy. Ta chọn hệ trục tọa độ tia *OA*, *OB*, *OS* lần lượt là Ox, Oy, Oz. Giả sử *SO* = *h*, *OA* = *a*, *OB* = *b* ta có
O(0; 0; 0), *A*(*a*; 0; 0), *B*(0; *b*; 0), *C*(–*a*; 0; 0), *D*(0;–*b*; 0), *S*(0; 0; *h*).

c) Hình chóp *S.ABCD* có đáy hình chữ nhật *ABCD* và *AB* = *b*. ΔSAD đều cạnh a và vuông góc với đáy. Gọi *H* là trung điểm *AD*, trong (*ABCD*) ta vẽ tia *Hy* vuông góc với *AD*. Chọn hệ trục tọa độ *Hxyz* ta có: *H*(0; 0; 0),

$A\left(\dfrac{a}{2};\ 0;\ 0\right)$, $B\left(\dfrac{a}{2};\ b;\ 0\right)$, $C\left(-\dfrac{a}{2};b;0\right)$, $D\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Hình lăng trụ đứng

Tùy theo hình dạng của đáy ta chọn hệ trục như các dạng trên.



Ví dụ 1. Cho hình lập phương *ABCD A'B'C'D'* cạnh *a*. Chứng minh rằng *AC'* vuông góc với mặt phẳng (*A'BD*).

Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho O ≡ *A*; *B* ∈ Ox; *D* ∈ Oy và A' ∈ Oz .

⇒ *A*(0;0;0), *B*(*a*;0;0), *D*(0;*a*;0), *A'*(0;0;*a*), *C'*(1;1;1)⇒ Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng(*A'BD*): *x* + *y* + *z* = *a* hay *x* + *y* + *z* –*a* = 0

⇒Pháp tuyến của mặt phẳng (*A'BC*): $\vec{n}_{(A'BC)}=(1;1;1)$ và $\overrightarrow{AC'}=(1;1;1)$.

Vậy *AC'* vuông góc với (*A'BC*)

Ví dụ 2. Cho lăng trụ *ABC.A'B'C'* các các mặt bên đều là hình vuông cạnh *a*. Gọi *D*, *F* lần lượt là trung điểm của các cạnh *BC*, *C'B'*. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *A'B* và *B'C'*.

Giải

Cách 1:

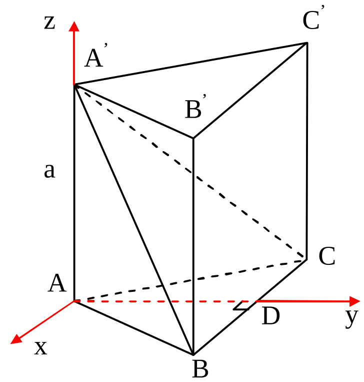
Vì các các mặt bên của lăng trụ đều là hình vuông nên $AB=BC=CA=A'B'=B'C'=C'A'=a$

⇒ các tam giác *ABC*, $A'B'C'$ là các tam giác đều.

Chọn hệ trục *Axyz*, với *Ax*, *Ay*, *Az* đôi một vuông góc, *A*(0;0;0),

$B\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, *A'*(0; 0; *a*),

$B'\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};a\right)$, $C'\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};a\right)$



Ta có: $B'C'//BC,\ B'C'//(A'BC)$

$$\Rightarrow d\left(B'C';\ A'B\right)=d\left(B'C';\left(A'BC\right)\right)=d\left(B';\left(A'BC\right)\right)$$

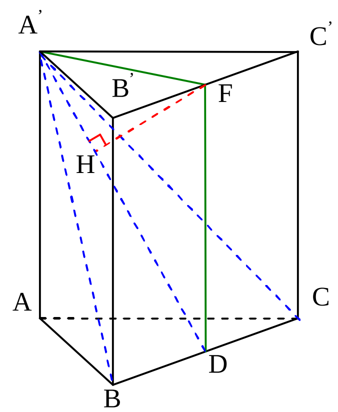
$\overrightarrow{A'B}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-a\right)$, $\overrightarrow{A'C}=\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-a\right)$

$\overrightarrow{A'B}\wedge\overrightarrow{A'C}=\left(0;\ a^2;\ \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)=a^2\left(0;\ 1;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=a^2.\vec{n}$, với $\vec{n}=\left(0;\ 1;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Phương trình mặt phẳng ($A'BC$) qua A' với vectơ pháp tuyến $\vec{n}$:

$$0(x-0)+1(y-0)+\frac{\sqrt{3}}{2}(z-a)=0\ \Leftrightarrow\ \left(A'BC\right):\ y+\frac{\sqrt{3}}{2}z-\frac{a\sqrt{3}}{2}=0$$

$$d\left(B'(A'BC)\right)=\frac{\left|\dfrac{a\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.a-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{3}{4}}}=\frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$



Vậy, $d\left(A'B;B'C'\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Cách 2:

Vì các các mặt bên của lăng trụ đều là hình vuông nên $AB = BC = CA = A'B' = B'C' = C'A' = a$

$\Rightarrow$ các tam giác *ABC*, *A'B'C'* là các tam giác đều.

Ta có: $B'C'//BC \Rightarrow B'C'//(A'BC)$.

$$\Rightarrow d\left(A'B;\ B'C'\right) = d\left(B'C';\left(A'BC\right)\right) = d\left(F;\left(A'BC\right)\right).$$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp FD \\ BC \perp A'D \quad (\Delta A'BC \text{ cân tại } A') \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'BC)$

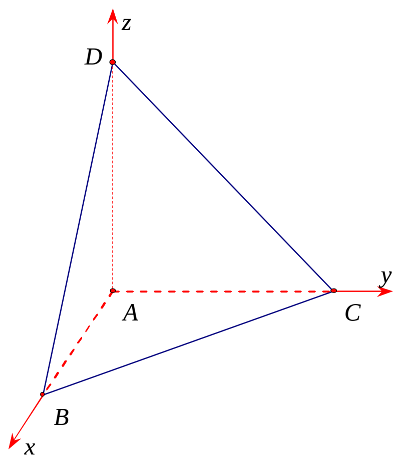
Dựng $FH \perp A'D$

Vì $BC \perp (A'BC) \Rightarrow BC \perp FH \ \Rightarrow H \perp (A'BC)$

$\Delta A'FD$ vuông có: $\dfrac{1}{FH^2} = \dfrac{1}{A'F^2} + \dfrac{1}{FD^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow FH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy, $d\left(A'B;\ B'C'\right) = FH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Ví dụ 3. Tứ diện *ABCD* có *AB*, *AC*, *AD* đôi một vuông góc với nhau, *AB* = 3, *AC*=*AD*=4. Tính khoảng cách từ *A* tới mặt phẳng (*BCD*)



Lời giải

+ Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $A \equiv$ O.

D $\in$Ox; *C* $\in$ Oy và *B* $\in$ Oz

$\Rightarrow$ *A*(0;0;0); *B*(0;0;3); *C*(0;4;0); *D*(4;0;0)

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (*BCD*) là:

$\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 3y + 4z - 12 = 0.$

Suy ra khoảngr cách từ *A* tới mặt phẳng (*BCD*).

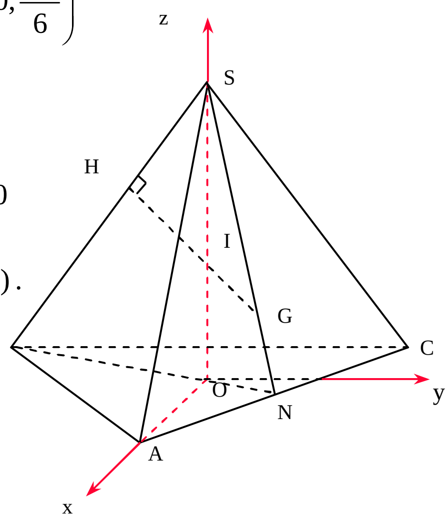
Ví dụ 4. Cho hình chóp *SABC* có độ dài các cạnh đề bằng 1, O là trọng tâm của tam giác Δ*ABC*. *I* là trung điểm của *S*O.

1. Mặt phẳng (*BIC*) cắt *SA* tại *M*. Tìm tỉ lệ thể tích của tứ diện *SBCM* và tứ diện *SABC*.
2. *H* là chân đường vuông góc hạ từ *I* xuống cạnh *SB*. Chứng minh rằng *IH* qua trọng tâm *G* của Δ*SAC*.

Lời giải

1. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho O là gốc tọa độ. *A*$\in$Ox, *S*$\in$Oz, *BC*//Oy

$$\Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};0;0\right);B\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{1}{2};0\right);C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};0\right);S\left(0;0\frac{\sqrt{6}}{3}\right);I\left(0;0;\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$



Ta có: $\overrightarrow{BC} = (0;1;0)\,;\overrightarrow{IC} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6};\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right);\Rightarrow\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{IC}\right] = \left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6};0;\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (*IBC*) là: $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}(x-0) + 0(y-0) + \dfrac{\sqrt{3}}{6}(z-\dfrac{\sqrt{6}}{6}) = 0$

Hay: $-\sqrt{2} + z - \dfrac{\sqrt{6}}{6} = 0$ mà ta lại có: $\overrightarrow{SA} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};0;-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SA}//\vec{u}_{SA}(1;0;-\sqrt{2})$.

Phương trình đường thẳng *SA*: $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + t;\, y = 0;\, z = -\sqrt{2}t$.

+ Tọa độ điểm *M* là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + t & (1) \\ y = 0 & (2) \\ y = -\sqrt{2}t & (3) \\ -\sqrt{2}x + z - \dfrac{\sqrt{6}}{6} = 0 & (4) \end{cases}$.

Thay (1), (2), (3) và (4): $\Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{12};\, y = 0;\, z = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{12};0;\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right);\Rightarrow \overrightarrow{SM} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{12};0;-\dfrac{\sqrt{6}}{12}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SA} = 4\overrightarrow{SM}$

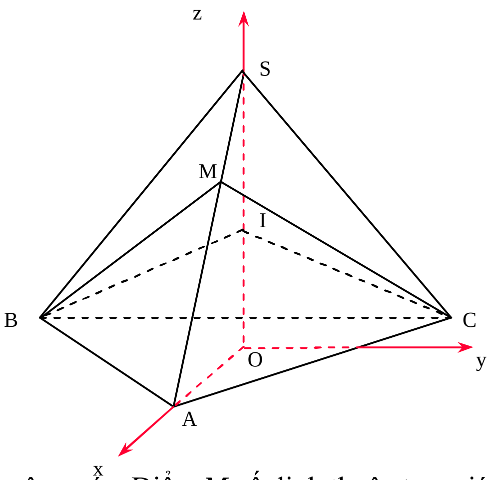
$\Rightarrow$ M nằm trên đoạn SA và $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{V_{(SBCM)}}{V(_{SABC})}=\dfrac{1}{4}$.

2. Do G là trọng tâm của tam giác ΔASC
$\Rightarrow SG$ đi qua trung điểm N của AC
$\Rightarrow GI\subset(SNB)\Rightarrow GI$ và SB đồng phẳng (1)

Ta lại có $G\left(\dfrac{\sqrt{3}}{18};\dfrac{1}{6};\dfrac{\sqrt{6}}{9}\right)\Rightarrow\overrightarrow{GI}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{18};-\dfrac{1}{6};\dfrac{\sqrt{6}}{18}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{GI}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{18};-\dfrac{1}{6};\dfrac{\sqrt{6}}{18}\right)\Rightarrow\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{SB}=0\Rightarrow GI\perp SB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow GI\perp SB=H$.



Ví dụ 5. Cho hình chóp O.ABC có OA = a, OB = b, OC = c đôi một vuông gốc. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) là 1, 2, 3. Tính a, b, c để thể tích O.ABC nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có:
O(0; 0; 0), $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, C(0; 0; c).
$d(M, (OAB)) = 3\Rightarrow z_M = 3$.
Tương tự $\Rightarrow M(1; 2; 3)$.

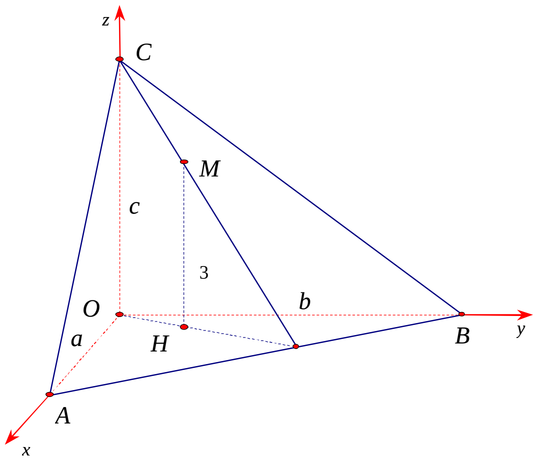
$\Rightarrow(ABC)$: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

$M\in(ABC)\Rightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1$ (1). $V_{O.ABC}=\dfrac{1}{6}abc$ (2).

(1) $\Rightarrow 1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}.\dfrac{2}{b}.\dfrac{3}{c}}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{6}abc\geq 27$.

(2)$\Rightarrow V_{\min}=27\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{3}{c}=\dfrac{1}{3}$.



BÀI GIẢI MẪU MỘT SỐ ĐỀ THI ĐẠI HỌC BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

Bài 1 (Đề thi Cao đẳng năm 2009). Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có AB = a, SA = $a\sqrt{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và CD. Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng SP. Tính theo a thể tích của khối tứ diện AMNP.

Giải Gọi O là tâm của ABCD. Chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ với

O(0;0;0), C($\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;0;0), A($-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;0;0), D(0;$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;0),

B(0; $-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;0), S(0;0;$\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$) ($SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$).

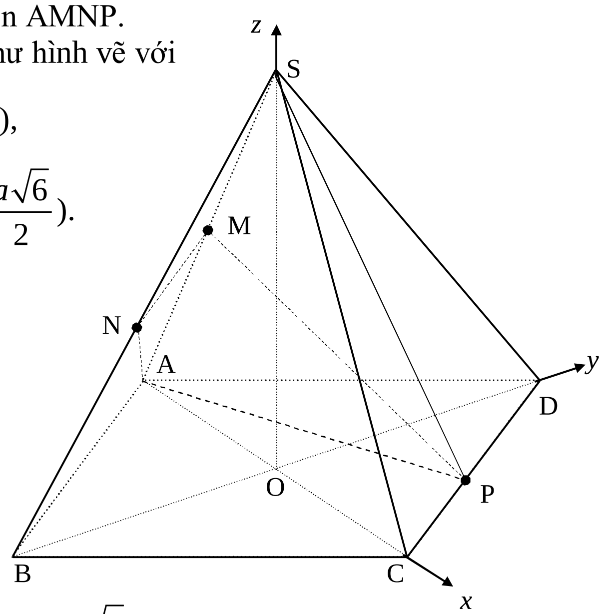
M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh

SA, SB và CD$\Rightarrow$M($-\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$;0; $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$),

N(0; $-\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$;$\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$), P($\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$;$\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$;0).

Khi đó

$\overrightarrow{MN}=(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0)$,



$\overrightarrow{SP}=(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{a\sqrt{6}}{2})\Rightarrow\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SP}=\dfrac{2a^2}{16}-\dfrac{2a^2}{16}+0.(-\dfrac{a\sqrt{6}}{2})=0\Rightarrow MN\perp SP$.

Mặt khác, ta lại có $\overrightarrow{AM}=(\frac{a\sqrt{2}}{4};0;\frac{a\sqrt{6}}{4})$, $\overrightarrow{AP}=(\frac{3a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0)$, $\overrightarrow{AN}=(\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{6}}{4})$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AP}\right].\overrightarrow{AN}=-\frac{a^3\sqrt{6}}{8}\neq 0\Rightarrow V_{AMNP}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AP}\right].\overrightarrow{AN}\right|=\frac{a^3\sqrt{6}}{48}.$ □

Lưu ý: *Đáp án chính thức cho phương án tính thể tích tứ diện AMNP gián tiếp thông qua thể tích tứ diện ABSP và thể tích khối chóp S.ABCD. Cách tính trên đây bằng phương pháp tọa độ là hoàn toàn trực tiếp, dễ định hướng. Việc tọa độ hóa có thể lấy một đỉnh của đáy làm gốc tọa độ (cần kẻ thêm đường thẳng qua đỉnh và song song với SO).*

Bài 2 (ĐH khối D – 2007). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\widehat{ABC}=\widehat{BAD}=90^\circ$, BA = BC = *a*, AD = 2*a*. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SA = $a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Giải

Chọn hệ trục tọa độ O*xyz* như hình vẽ, với $A\equiv$ O(0;0;0), *B*(*a*;0;0), *D*(0;2*a*;0), *C*(*a*;*a*;0), *S*(0;0;$a\sqrt{2}$). Khi đó $\overrightarrow{SC}=(a;a;-a\sqrt{2}),\overrightarrow{CD}=(-a;a;0)\Rightarrow\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow SC\perp CD$, hay tam giác SCD vuông tại C.

Mặt khác (*SCD*) có VTPT là $\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{CD}\right]=(a^2\sqrt{2};a^2\sqrt{2};2a^2)$

$\Rightarrow(SCD):1.(x-a)+1.(y-a)+\sqrt{2}.(z-0)=0$

hay (*SCD*): $x+y+\sqrt{2}z-2a=0$.

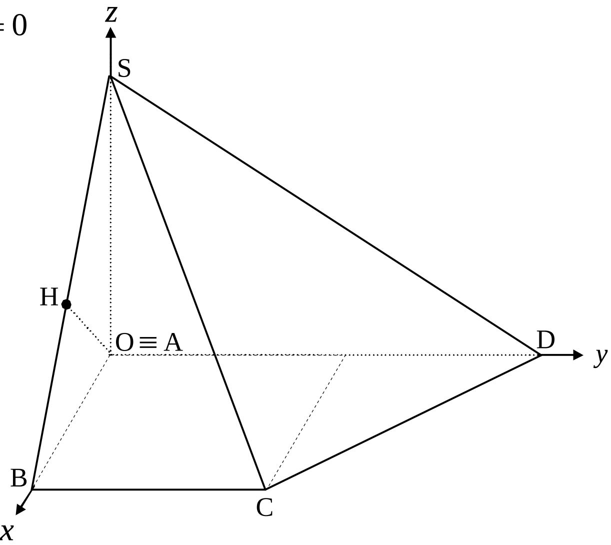
Đường thẳng SB có phương trình tham số là

$$\begin{cases}x=a+t\\y=0\\z=-\sqrt{2}t\end{cases}$$

$H\in SB\Rightarrow H(a+t;0;-\sqrt{2}t)$.

$AH\perp SB\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB}=0\Leftrightarrow t=-\frac{a}{3}$.

Vậy $H(\frac{2a}{3};0;\frac{a\sqrt{2}}{3})$.



Từ đó suy ra khoảng cách từ *H* đến (*SCD*) là

$$d(H,(SCD))=\frac{\left|\frac{2a}{3}+\frac{2a}{3}-2a\right|}{\sqrt{1+1+2}}=\frac{a}{3}.$$ □

Nhận xét: *Nếu so với đáp án chính thức trong việc tính d(H,(SCD)) thì lời giải này rõ ràng và trực tiếp hơn, dễ hiểu hơn (đáp án chính thức tính* d(H, (SCD)) *thông qua việc tính tỉ số* d(H,(SCD))/d(B,(SCD)) *rồi lại tính* d(B,(SCD)) *thông qua thể tích tứ diện SBCD*).

Bài 3 (ĐH khối D – 2008). Cho lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* vuông, *AB* = *BC* = *a*, cạnh bên *AA'* = $a\sqrt{2}$. Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Tính theo *a* thể tích của khối lăng trụ đã cho và khoảng cách giữa hai đường thẳng *AM*, *B'C*.

Giải

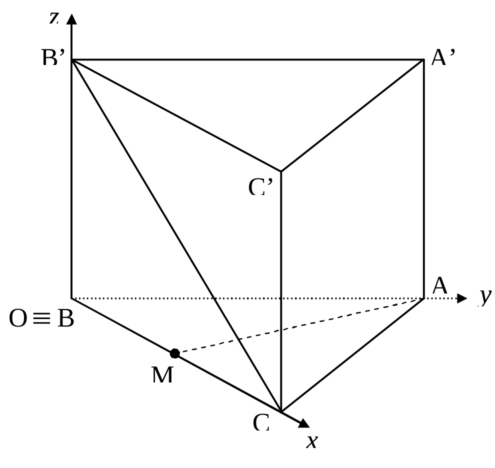
Từ giả thiết ta có tam giác đáy ABC vuông cân tại B, kết hợp với tính chất của lăng trụ đứng, ta chọn hệ trục O*xyz* như hình vẽ, với B ≡ O(0;0;0), C(*a*;0;0), A(0;*a*;0), B'(0;0;$a\sqrt{2}$).

Dễ thấy $V_{ABC.A'B'C'}=BB'.(\frac{1}{2}.BA.BC)=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Bây giờ ta tính khoảng cách giữa AM và B'C.

M là trung điểm của BC

$\Rightarrow M(\frac{a}{2};0;0)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(\frac{a}{2};-a;0)$



Mặt khác, $\overrightarrow{B'C}=(a;0;-a\sqrt{2})\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]=(a^2\sqrt{2};\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2)$.

Lại có $\overrightarrow{AC}=(a;-a;0)\Rightarrow d(AM,B'C)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|}=\dfrac{\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a^2\sqrt{7}}{\sqrt{2}}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. □

Nhận xét: *Theo đáp án chính thức, việc tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'C trong bài toán này hoàn toàn không dễ, đòi hỏi dựng được mặt phẳng chứa AM và song song với B'C, rồi qui việc tính khoảng cách giữa hai đường thẳng này về khoảng cách từ C, rồi lại từ B đến mặt phẳng mới dựng đó. Lời giải bằng tọa độ rõ ràng là rất ngắn gọn và trực tiếp.*

Bài 4 (ĐH khối B – 2007). Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh *a*. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo *a*) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Giải Gọi O là tâm của đáy ABCD.

Vì hình chóp đã cho là hình chóp đều nên SO ⊥ (ABCD).

Ta chọn hệ trục O*xyz* với O là gốc tọa độ, tia OC ≡ tia O*x*, tia OD ≡ tia O*y*, tia OS ≡ tia Oz.

Khi đó ta có

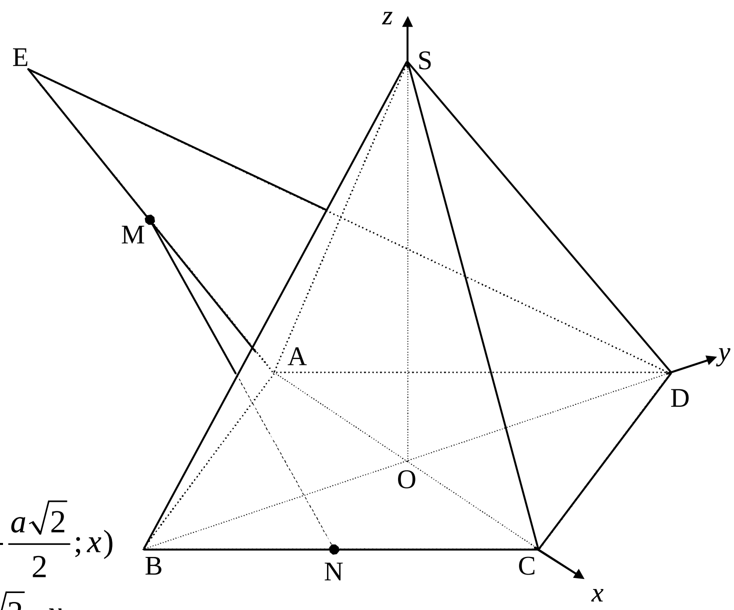
O(0;0;0), A($-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;0;0), C($\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;0;0),

B(0;$-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;0), D(0; $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;0),

S ∈ tia Oz ⇒ $S(0;0;x)$ ($x>0$).

E đối xứng với D qua trung điểm của SA

⇒ ADSE là hình bình hành ⇒ $E(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};x)$



M là trung điểm của AE ⇒ $M(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};-\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{x}{2})$

N là trung điểm của BC ⇒ $N(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(\dfrac{3a\sqrt{2}}{4};0;-\dfrac{x}{2})$

Mặt khác $\overrightarrow{BD}=(0;a\sqrt{2};0)\Rightarrow\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow MN\perp BD$.

Lại có $\overrightarrow{AC}=(a\sqrt{2};0;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right]=(0;\dfrac{ax\sqrt{2}}{2};0)$.

Mà $\overrightarrow{AN}=(\dfrac{3a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0)$ $\Rightarrow d(MN,AC)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right]\right|}=\dfrac{\dfrac{a^2x}{4}}{\dfrac{ax\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. □

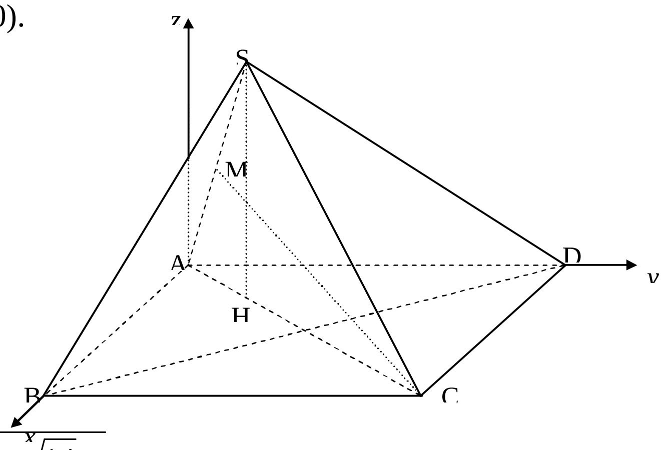
Nhận xét: *Bài toán 4 có thể được tọa độ hóa với gốc tọa độ là một đỉnh của đáy bằng việc kẻ thêm đường thẳng qua đỉnh, song song với SO, tạo thành bộ ba đường thẳng đôi một vuông góc tại đỉnh đó. Cái hay của việc tọa độ hóa ở lời giải chính là việc chọn biến x chưa biết đối với tọa độ điểm S, nhưng kết quả lại không phụ thuộc vào x.*

Bài 5 (ĐH khối D – 2010). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh *a*, cạnh bên SA = *a* ; hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC, AH = $\dfrac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC

Giải

Chọn hệ trục O*xyz* với A là gốc tọa độ, tia AB là tia O*x*, tia AD là tia O*y*, tia Oz là tia Az

Ta có A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0).



$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Rightarrow H(\frac{a}{4};\frac{a}{4};0)$

Theo giả thiết SH $\perp$ (ABCD),

AH = $\frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, SA = a

$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$

$\Rightarrow S(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{14}}{4})$

Vậy ta có $SC = \sqrt{(a-\frac{a}{4})^2 + (a-\frac{a}{4})^2 + (-\frac{a\sqrt{14}}{4})^2} = a\sqrt{2} = CA \Rightarrow \Delta$ SAC cân tại C nên đường cao CM cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow$ M là trung điểm của SA $\Rightarrow M(\frac{a}{8};\frac{a}{8};\frac{a\sqrt{14}}{8})$.

Vì M là trung điểm SA nên $V_{SMBC} = V_{AMBC}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (a;0;0), \overrightarrow{AC} = (a;a;0), \overrightarrow{AM} = (\frac{a}{8};\frac{a}{8};\frac{a\sqrt{14}}{8})$ $\Rightarrow V_{SMBC} = V_{AMBC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AM}\right| = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$.

□

Nhận xét: *Bài toán này có thể được tọa độ hóa với gốc tọa độ là điểm H hoặc tâm của đáy. Việc tính thể tích SMBC thông qua thể tích AMBC chỉ là vấn đề kĩ thuật để phép toán dễ tính hơn, hoàn toàn có thể tính trực tiếp được thể tích SMBC vì tọa độ các đỉnh đã biết.*

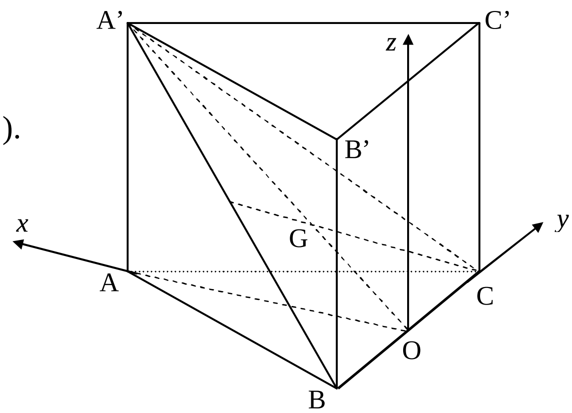
Bài 6 (ĐH khối B – 2010). Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

GiảiGọi O là trung điểm của cạnh BC. Tam giác ABC đều cạnh a nên AO $\perp$ BC và AO = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn hệ trục Oxyz với O là gốc tọa độ, tia OA $\equiv$ tia Ox, tia OC $\equiv$ tia Oy, tia Oz song song và cùng hướng với tia AA'. Khi đó A($\frac{a\sqrt{3}}{2}$;0;0), B(0;$-\frac{a}{2}$;0), C(0;$\frac{a}{2}$;0), A'($\frac{a\sqrt{3}}{2}$;0;$\frac{3a}{2}$).

Dễ thấy góc giữa mặt phẳng (A'BC) và (ABC) là góc $\widehat{A'OA} = 60^\circ \Rightarrow AA' = OA.\tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \frac{3a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.



G là trọng tâm tam giác A'BC nên G($\frac{a\sqrt{3}}{6}$;0;$\frac{a}{2}$).

Bây giờ, ta đi xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC, với G($\frac{a\sqrt{3}}{6}$;0;$\frac{a}{2}$), A($\frac{a\sqrt{3}}{2}$;0;0),

B(0;$-\frac{a}{2}$;0), C(0;$\frac{a}{2}$;0).

Giả sử mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2px - 2qy - 2rz + k = 0.$$

Thay lần lượt tọa độ G, A, B, C vào phương trình trên ta có

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{3} - \dfrac{a\sqrt{3}}{3}p - ar + k = 0 \\ \dfrac{3a^2}{4} - a\sqrt{3}p + k = 0 \\ \dfrac{a^2}{4} + aq + k = 0 \\ \dfrac{a^2}{4} - aq + k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \\ r = -\dfrac{a}{12} \\ q = 0 \\ k = -\dfrac{a^2}{4} \end{cases}$$

Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC có tâm $I(\frac{a\sqrt{3}}{6};-\frac{a}{12};0)$ và $R = \sqrt{\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{144} + 0 - (-\frac{a^2}{4})} = \frac{7a}{12}$.

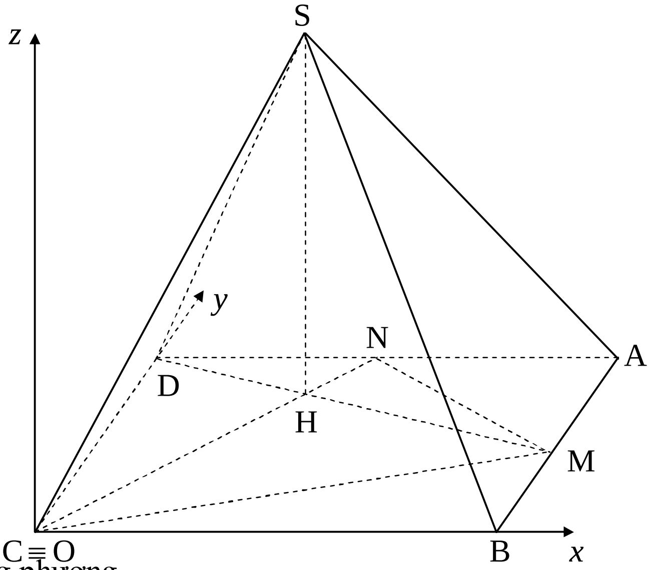
□

Bài 7 (ĐH khối A – 2010). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh *a*. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH$\perp$(ABCD) và SH = $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo *a*.

Giải

Dễ thấy $V_{S.CDNM} = V_{S.ABCD} - V_{S.BCM} - V_{S.AMN}$

$= \frac{1}{3}SH.(S_{ABCD} - S_{BCM} - S_{AMN}) = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}(a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8}) = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$.



Bây giờ ta tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC bằng phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục O*xyz* như hình vẽ, ta có C$\equiv$O(0;0;0), B(*a*;0;0), D(0;*a*;0), A(*a*;*a*;0).

M là trung điểm AB $\Rightarrow M(a;\frac{a}{2};0)$

N là trung điểm AD $\Rightarrow N(\frac{a}{2};a;0)$

$H \in (Oxy) \Rightarrow H(x;y;0)$

$H = DM \cap CN$

$\Rightarrow \overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CN}$ cùng phương và $\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DM}$ cùng phương

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{y}{a}$ và $\frac{x}{a} = \frac{y-a}{-\frac{a}{2}} \Rightarrow x = \frac{2a}{5}, y = \frac{4a}{5}$. Vậy $H(\frac{2a}{5};\frac{4a}{5};0) \Rightarrow S(\frac{2a}{5};\frac{4a}{5};a\sqrt{3})$

Khi đó, $\overrightarrow{CS} = (\frac{2a}{5};\frac{4a}{5};a\sqrt{3}),\ \overrightarrow{DM} = (a;-\frac{a}{2};0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{CS},\overrightarrow{DM}\right] = (\frac{a^2\sqrt{3}}{2};a^2\sqrt{3};-a^2)$

Mặt khác $\overrightarrow{CM} = (a;\frac{a}{2};0) \quad \Rightarrow d(SC,DM) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{CS},\overrightarrow{DM}\right].\overrightarrow{CM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CS},\overrightarrow{DM}\right]\right|} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{\frac{a^2\sqrt{19}}{2}} = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$. □

Bài 8 (ĐH khối D – 2011). Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = 3*a*, BC = 4*a*, mặt phẳng (SBC) vuông góc (ABC). Biết SB = $2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo *a*.

Giải

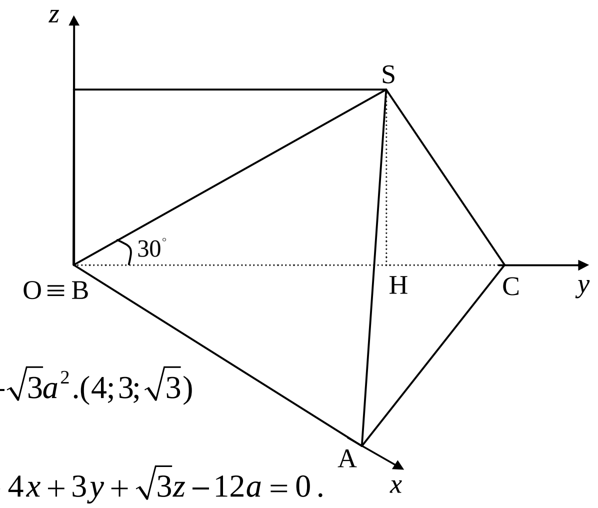
Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ S lên BC.

Vì (SBC)$\perp$(ABC) nên SH$\perp$(ABC).

Mặt khác SB = $2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ \Rightarrow SH = SB.\sin 30^\circ = a\sqrt{3},\ BH = SB.\cos 30^\circ = 3a$.

Dễ thấy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.(\frac{1}{2}.3a.4a) = 2a^3\sqrt{3}$.

Bây giờ ta tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng phương pháp tọa độ.



Chọn hệ trục O*xyz* với B là gốc tọa độ, tia BA là tia O*x*, tia BC là tia O*y*, tia Oz là tia Bz song song và cùng hướng với tia HS.

Khi đó: B(0;0;0), A(3*a*;0;0), C(0;4*a*;0), S(0;3*a*; $a\sqrt{3}$).

$\Rightarrow \overrightarrow{AS} = (-3a; 3a; a\sqrt{3}), \overrightarrow{AC} = (-3a; 4a; 0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(-4a^2\sqrt{3}; -3a^2\sqrt{3}; -3a^2\right) = -\sqrt{3}a^2.(4;3;\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (SAC) có phương trình là

$$4(x-3a)+3(y-0)+\sqrt{3}(z-0)=0 \Leftrightarrow 4x+3y+\sqrt{3}z-12a=0.$$

Vậy khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) là

$$d(B,(SAC)) = \frac{|-12a|}{\sqrt{4^2+3^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{6a\sqrt{7}}{7}.$$ □

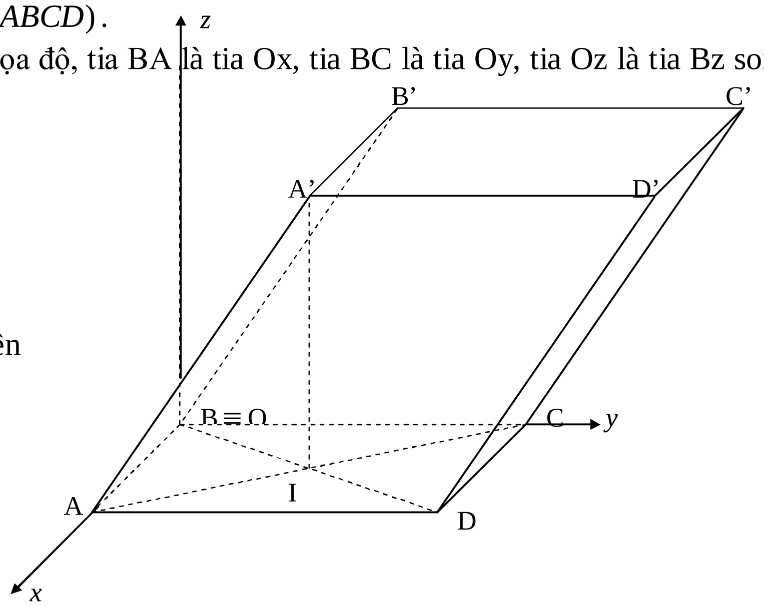
Nhận xét: *Nếu so với cách tính khoảng cách từ điểm B đến (SAC) thông qua khoảng cách từ điểm H của đáp án chính thức thì cách trên là trực tiếp, dễ định hướng hơn và dễ thực hiện hơn.*

Bài 9 (ĐH khối B – 2011). Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = *a*, AD = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABCD) trùng với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD'A') và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ B' đến mặt phẳng (A'BD) theo *a*.

Giải

Gọi I = AC ∩ BD. Ta có $A'I \perp (ABCD)$.

Chọn hệ trục O*xyz* với B là gốc tọa độ, tia BA là tia Ox, tia BC là tia Oy, tia Oz là tia Bz song song và cùng hướng với tia IA'.



Khi đó

B(0;0;0), A(*a*;0;0), C(0; $a\sqrt{3}$;0),

D(*a*; $a\sqrt{3}$;0), I($\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0$).

A' có hình chiếu lên (O*xy*) là I nên

A'($\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; z$) $(z > 0)$.

Ta tìm z:

+ Mặt phẳng (ABCD) chính là mặt phẳng (O*xy*) nên có VTPT là $\vec{k} = (0;0;1)$.

+ $\overrightarrow{AD} = (0; a\sqrt{3}; 0)$, $\overrightarrow{AA'} = (-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; z) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\right] = (az\sqrt{3}; 0; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.(2z; 0; a)$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (ADD'A') có VTPT là $\vec{n} = (2z; 0; a)$.

+ Góc giữa hai mặt phẳng (ADD'A') và (ABCD) bằng 60^0 nên ta có

$$\frac{|\vec{k}.\vec{n}|}{|\vec{k}|.|\vec{n}|} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{4z^2+a^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (z>0). \text{Vậy A'}(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}).$$

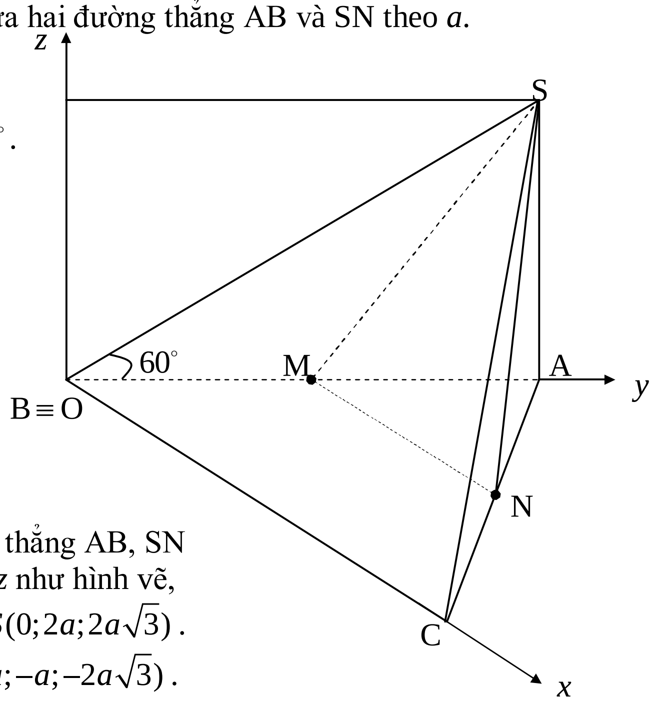
Do đó $V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'I.S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{2}$.

Mặt phẳng (A'BD) có VTPT là $\left[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD}\right] = (-\frac{3a^2}{2}; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}; 0) = -\frac{a^2}{2}.(3; -\sqrt{3}; 0)$

$\Rightarrow (A'BD): 3x - \sqrt{3}y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - y = 0$ .Mặt khác $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow B'(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2})$

Vậy khoảng cách từ B' đến (A'BD) là $d(B',(A'BD)) = \frac{\left|-\frac{a}{2}.\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right|}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. □

Bài 10 (ĐH khối A – 2011). Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2*a*; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo *a*.



GiảiTheo giả thiết (SAB), (SAC) cùng vuông góc với (ABC) nên SA ⊥ (ABC).

$\Rightarrow$ Góc giữa (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

$\Rightarrow SA = AB.\tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.

Mặt phẳng qua SM, song song BC, cắt AC tại N $\Rightarrow$ MN // BC $\Rightarrow$ N là trung điểm AC.

Do đó tam giác AMN vuông cân tại M.

Khi đó, ta có

$V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}SA.S_{BCNM} = \frac{1}{3}SA.(S_{ABC} - S_{AMN})$

$= \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.(\frac{4a^2}{2} - \frac{a^2}{2}) = a^3\sqrt{3}$.

Bây giờ ta tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, SN bằng phương pháp tọa độ.Chọn hệ trục O*xyz* như hình vẽ, với B là gốc tọa độ, $C(2a;0;0), A(0;2a;0), S(0;2a;2a\sqrt{3})$.

N là trung điểm AC $\Rightarrow N(a;a;0) \Rightarrow \overrightarrow{SN} = (a;-a;-2a\sqrt{3})$.

Mặt khác $\overrightarrow{BA} = (0;2a;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{BA}\right] = (4a^2\sqrt{3}; 0; 2a^2)$.

Lại có $\overrightarrow{BN} = (a;a;0) \Rightarrow d(SN, AB) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{BA}\right].\overrightarrow{BN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{BA}\right]\right|} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{2a^2\sqrt{13}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$. □

-----------------------oOo---------------------------

TỔNG HỢP CÁC BÀI TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC TỪ 2002 ĐẾN 2013

Bài 1 (ĐH A2002). Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giá AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). **ĐS :** $S_{\Delta AMN} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$

Bài 2 (ĐH B2002). Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D.Gọi M,N,P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BB_1, CD, A_1D_1. Tính góc giữa hai đường thẳng MP, C_1N. **ĐS :** $d(A_1B, B_1D) = \frac{a}{\sqrt{6}}$, $\varphi = 90^0$

Bài 3 (ĐH D2002). Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; AC = AD = 4cm; AB = 3cm; BC = 5cm. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).**ĐS :** $d\left(A,(BCD)\right) = \frac{6\sqrt{34}}{17}$

Bài 4 (ĐH A2003). Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính số đo của góc phẳng nhị diện [B,A'C,D].

ĐS : 120^0

Bài 5 (ĐH B2003). Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh CC'. Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài canh AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông.

ĐS : $AA' = a\sqrt{2}$

Bài 6 (ĐH D2003) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B với AB = a. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và AB = AC = BD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a. **ĐS :** $d\left(A,(BCD)\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài 7 (ĐH B2004) Cho hình tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^0 < \varphi < 90^0$). Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ. **ĐS :** $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3\tan\varphi$

Bài 8 (ĐH A2006−NC) Cho hình trụ có các đáy là hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích của khối tứ diện OO'AB **ĐS :** $V_{O.O'AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3$

Bài 9 (ĐH B2006−NC) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích khối tứ diện ANIB. **ĐS :** $V_{A.NIB} = \dfrac{\sqrt{2}}{36}a^3$

Bài 10 (ĐH D2006−NC) Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích khối chóp A.BCNM. **ĐS :** $V_{A.BCMN} = \dfrac{3\sqrt{3}}{50}a^3$

Bài 11 (ĐH A2007−NC) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.**ĐS :** $V_{C.MNP} = \dfrac{\sqrt{3}}{96}a^3$

Bài 12 (ĐH B2007−NC) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.**ĐS :** $d\left(MN,AC\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

Bài 13 (ĐH D2007−NC) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang . $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = a$\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

ĐS: $d\left(H,(SCD)\right) = \dfrac{a}{3}$

Bài 14 (ĐH A2008−NC) Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB=a, AC=$a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', $B'C'$.

ĐS : $V_{A'.ABC} = \dfrac{a^3}{2}$; $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$

Bài 15(ĐH B2008−NC) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, SB = $a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

ĐS : $V_{S.BMDN} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$; $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Bài 16(ĐH D2008−NC) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

ĐS : $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$; $d(AM, B'C) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$

Bài 17(ĐH A2009) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = AD = 2a, CD =a; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích hình chóp S.ABCD theo a.

ĐS : $V_{S.ABCD} = \dfrac{3\sqrt{15}}{5}a^3$

Bài 18(ĐH B2009 Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có BB' = a, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A'ABC theo a.

ĐS : $V_{A'.ABC} = \dfrac{9}{208}a^3$

Bài 19(ĐH D2009) Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

ĐS : $V_{I.ABC} = \dfrac{4}{9}a^3$; $d(A,(IBC)) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

Bài 20(ĐH A2010) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SH = $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a .

ĐS : $V_{S.CDMN} = \dfrac{5\sqrt{3}}{24}a^3$; $d(DM, SC) = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}a$

Bài 21(ĐH B2010) Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

ĐS : $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$; $R = \dfrac{7a}{12}$

Bài 22(ĐH D2010) Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, cạnh bên *SA = a*; hình chiếu vuông góc của đỉnh *S* trên mặt phẳng *(ABCD)* là điểm *H* thuộc đoạn *AC*, $AH = \dfrac{AC}{4}$ .Gọi *CM* là đường cao của tam giác *SAC*. Chứng minh *M* là trung điểm của *SA* và tính thể tích khối tứ diện *SMBC* theo *a*.

ĐS : $V_{S.BCM} = \dfrac{\sqrt{14}}{48}a^3$

Bài 22(ĐH A2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

ĐS : $V_{S.BCMN} = \sqrt{3}a^3$; $d(AB, SN) = \dfrac{2\sqrt{39}}{13}a$

Bài 23(ĐH B2011) Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ .Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng (*ABCD*) trùng với giao điểm của *AC* và *BD*. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và ($ABCD$) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo *a*. **ĐS :** $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{3}{2}a^3$; $d\left(B_1,(A_1BD)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 24(ĐH D2011) Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B*, *BA* = 3*a*, *BC* = 4*a*; mặt phẳng (*SBC*) vuông góc với mặt phẳng (*ABC*). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $SBC = 30^0$. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách từ điểm *B* đến mặt phẳng (*SAC*) theo *a*. **ĐS :** $V_{S.ABC} = 2\sqrt{3}a^3$; $d\left(B,(SAC)\right) = \frac{6\sqrt{7}a}{7}$

Bài 25(ĐH A2012) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a. **ĐS :** $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{7}}{12}a^3$; $d\left(SA,BC\right) = \frac{\sqrt{42}a}{8}$

Bài 26(ĐH B2012) Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* với *SA* = 2a, *AB* = a. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *A* trên cạnh *SC*. Chứng minh *SC* vuông góc với mặt phẳng (*ABH*). Tính thể tích của khối chóp *S.ABH* theo a. **ĐS :** $V_{S.ABH} = \frac{7\sqrt{11}}{96}a^3$

Bài 27(ĐH D2012) Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông, tam giác A'AC vuông cân, A'C = a. Tính thể tích khối tứ diện ABB'C' và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

ĐS : $V_{A.BB'C'} = \frac{\sqrt{2}}{48}a^3$; $d\left(A,(BCD')\right) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Bài 28(ĐH A2013) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^0$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB). **ĐS :** $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{16}$; $d\left(C,(SAB)\right) = \frac{a\sqrt{39}}{13}$

Bài 29(ĐH B2013) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy .Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCDvà khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD). **ĐS :** $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$; $d\left(A,(SCD)\right) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Bài 30(ĐH D2013) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a. Cạnh SA vuông góc với đáy , $\widehat{BAD} = 120^0$, M là trung điểm của cạnh BC và $\widehat{SMA} = 45^0$ .Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCDvà khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC). **ĐS :** $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{4}$; $d\left(D,(SBC)\right) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

----------- Hết -----------

CHÚC CÁC EM HỌC TỐT

Lớp bồi dưỡng kiến thức và LTĐH chất lượng cao

www.huynhvanluong.com

Lớp học thân thiện của học sinh Tây Ninh

0918.859.305 – 01234.444.305 – 0996.113.305-0929.105.305-0967.859.305
