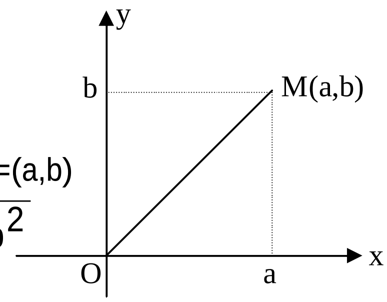
SỐ PHỨC

I. Một số vấn đề về số phức:

- Mỗi số phức đều có dạng: z = a+b.i ;

+ Trong đó: $\begin{cases} \text{a : phan thöïc} \\ \text{b : phan ao} \\ \text{i : ñôn vò ao} : i^2 = -1 \end{cases}$ + Trường hợp đặc biệt: $\begin{cases} a = 0 \Rightarrow \text{z la thuan ao} \\ b = 0 \Rightarrow \text{z la so thöïc} \end{cases}$

- Số phức liên hợp của z là: $\bar{z} = a - b.i$
- Môđun của số phức z là: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Biểu diễn hình học của số phức:



+ Số phức z = a+b.i biểu diễn bởi điểm M(a;b) hoặc $\overrightarrow{OM} = (a,b)$
+ Môđun của số phức z biểu diễn bởi OM = $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
+ Ox: trục thực
+ Oy: trục ảo

II. Dạng lượng giác và dạng mũ của số phức:

- Dạng lượng giác: Số phức z=a +b.i có thể viết với dạng: z = r(cosφ + i.sinφ)

Trong đó: $\begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{r};\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r}; \tan\varphi = \dfrac{b}{a} \end{cases}$

- Dạng mũ: Số phức z=a +b.i có thể viết với dạng: $z = r.e^{i\varphi}$ (với r và φ tính như trên)

III. Công thức Moivre: $(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i.\sin n\varphi$

Áp dụng cho hai số phức: z = r(cosφ + i.sinφ) và z’ = r’(cosφ’ + i.sinφ’), ta có:

- Phép nhân: z.z’ = r.r’[cos(φ +φ’)+ i.sin(φ +φ’)]
- Phép chia: z/z’ = r/r’[cos(φ -φ’)+ i.sin(φ - φ’)]

IV. Căn bậc hai của số phức:

- Dạng đại số:

Giả sử căn bậc hai của số phức z=a +b.i là x+y.i, ta có:

$$z = (x + y.i)^2$$

$$\Leftrightarrow a + b.i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên tìm được x, y và suy ra kết quả

- ➢Mỗi số phức $z \neq 0$ có hai căn bậc hai đối nhau
- ➢Hai căn bậc hai của a > 0 là $\pm\sqrt{a}$
- ➢Hai căn bậc hai của a < 0 là $\pm i\sqrt{a}$

- Dạng lượng giác: $\sqrt{z} = \pm\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} + i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$

VII. Chú ý: Tổng của n số hạng u_1, u_2, u_3,… lập thành cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q là: $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$ (với $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_3}{u_2} = ... = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$)

CÁC DẠNG TOÁN SỐ PHỨC TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC

VẤN ĐỀ 1: CÁC PHÉP TOÁN TRÊN SỐ PHỨC

Dạng 1. Tìm phần thực, phần ảo của một số phức

1. Các bài tập mẫu:

Bài 1: Tìm phần thực, phần ảo của số phức $(-1+i)^3-(2i)^3$

Giải: Ta có: $\begin{matrix}(-1+i)^3=(-1)^3+3(-1)^2i+3(-1)i^2+i^3=2+2i \\ (2i)^3=2^3\times i^3=-8i\end{matrix} \Rightarrow (-1+i)^3-(2i)^3=2+10i$

Vậy số phức đã cho có phần thực là 2, phần ảo là 10.

Bài 2: (A10) Tìm phần ảo của số phức *z*, biết $\overline{z}=\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)$

Giải: Ta có: $\overline{z}=\left(1+2\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)=5+\sqrt{2}i \Rightarrow z=5-\sqrt{2}i$

Phần ảo của số phức z bằng: $-\sqrt{2}$.

Bài 3: (CD10) Cho số phức z thỏa: $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

Giải: Gọi z = a + bi $(a\in R, b\in R)$. Đẳng thức đã cho trở thành 6a + 4b - 2(a + b)i = 8 - 6i

$\Leftrightarrow \begin{cases}6a+4b=8 \\ 2a+2b=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2 \\ b=5\end{cases}$

Vậy số phức z đã cho có phần thực là -2, phần ảo là 5

Bài 4: (CDA09) Cho số phức z thỏa $(1+i)^2(2-i)z=8+i+(1+2i)z$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

Ta có: $(1+i)^2(2-i)z=8+i+(1+2i)z$

$\Leftrightarrow z\left[(1+i)^2(2-i)-(1+2i)\right]=8+i$

$\Leftrightarrow z\left[2i(2-i)-1-2i\right]=8+i$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{8+i}{2i+1}=\dfrac{(8+i)(1-2i)}{5}=2-3i$

Vậy số phức z đã cho có phần thực là 2, phần ảo là -3

2. Các bài tập đề nghị có đáp số:

Bài 1: Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z=\dfrac{(1+i)^{30}}{(1-i)^{15}}$

Bài 2: Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\mathrm{z}=\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}\right)^3$. ĐS : 2 ; 2

Bài 3: Tìm phần thực và phần ảo của số phức sau: $1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\ldots+(1+i)^{20}$.
ĐS: Phần thực -2^{10}, phần ảo: $2^{10}+1$.

Bài 4 : Cho hai số phức $z_1 = 2 + 5i$ và $z_2 = 3 - 4i$. Xác định phần thực và phần ảo của số phức $z_1.z_2$.
ĐS:. + Phần thực: 26 + Phần ảo: 7.

Dạng 2. Tìm môđun của số phức

1. Bài tập mẫu: (A10) Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$. Tìm môđun của số phức $\bar{z} + iz$

Giải: Ta có: $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3 = -8$

Do đó $\bar{z} = \frac{-8}{1-i} = -4-4i \Rightarrow z = -4+4i$

$\Rightarrow \bar{z} + iz = -4-4i + \left(-4+4i\right)i = -8-8i$

Vậy $\left|\bar{z} + iz\right| = 8\sqrt{2}.$

2. Các bài tập đề nghị có đáp số:

Bài 1: Tìm môđun của số phức $\mathrm{z} = \frac{(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{1+2\mathrm{i}}$. ĐS: $|\mathrm{z}| = \sqrt{2}$.

Bài 2 : Tính môđun của số phức *z*, biết: (2z - 1)(1 + i) + ($\bar{z}$ + 1)(1 - i)=2 – 2i. ĐS : $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Bài 3: Tìm môđun của số phức $z = \frac{(1+i)(2-i)}{1+2i}$. ĐS: $|z| = \sqrt{2}$.

Bài 4: Tìm môđun của số phức $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2} + i\sqrt{2xy}}{(x-y)+2i\sqrt{xy}}$ ĐS: $|z| = 1$.

Dạng 3. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện cho trước

1. Bài tập mẫu:

Bài 1: (D10) Tìm số phức z thỏa mãn: $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

Giải: Gọi z = a + bi $\left(a \in R, b \in R\right)$, ta có: $\bar{z} = \sqrt{a^2+b^2}$ và $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

Yêu cầu bài toán tỏa mãn khi và chỉ khi: $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ a^2-b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm 1 \\ b=\pm 1 \end{cases}$

Vậy các số phức cần tìm là: 1 + i; 1 – i; -1 + i; -1 – i.

Bài 2: (B09) Tìm số phức z thỏa mãn: $\left|z-\left(2+i\right)\right| = \sqrt{10}$ và $z.\bar{z} = 25$.

Giải: Gọi z = a + bi $\left(a \in R, b \in R\right)$,

Ta có: $z-\left(2+i\right) = \left(a-2\right) + \left(b-1\right)i;$

Từ giả thiết ta có: $\left|z-\left(2+i\right)\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left(a-2\right)^2 + \left(b-1\right)^2 = \sqrt{10} \quad (1)$

và $z.\bar{z} = 25 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25 \quad (2)$

Giải hệ (1) và (2) ta được $\begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \vee \begin{cases} a=5 \\ b=0 \end{cases}$ Vậy các số phức cần tìm là: $z = 3+4i$ hoặc $z = 5$

Bài 3: Tìm số phức z thỏa mãn: $z^2 + |z| = 0$

Giải: Gọi z = x + yi $\left(x \in R, y \in R\right)$, khi đó

$z^2 + |z| = 0 \Leftrightarrow \left(x+yi\right)^2 + \sqrt{x^2+y^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) + 2xyi = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 + |y| = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + |x| = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ |y|\left(1 - |y|\right) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ |x|\left(1 + |x|\right) = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ |y| = 1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ x = 0\left(do\,|x| + 1 > 0\right) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = 0, y = 1 \\ x = 0, y = -1 \end{array}\right. \\ x = 0, y = 0 \end{array}\right.$$

Vậy các số phức cần tìm là: $z = 0; z = i; z = -i$

2. Các bài tập đề nghị có đáp số:

Bài 1: Tính số phức sau: z = $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}$. ĐS: z = 2.

Bài 2: Tìm số phức *z* thỏa mãn $z^2 = -i\sqrt{2}$ ĐS: $z = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-i)$.

Bài 3: Tìm số phức z thỏa mãn : $z - (2+3i)\overline{z} = 1 - 9i$. ĐS : z = 2 – i

Bài 4: Tìm số phức z, biết : $z^2 = |z|^2 + \overline{z}$. ĐS : $z = 0; z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i; z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Bài 5: Tìm số phức z, biết : $\overline{z} = \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$. ĐS : $z = -1 - i\sqrt{3};\ \ z = 2 - i\sqrt{3}$

Bài 6: Tính số phức sau: z = $(1+ i)^{15}$. ĐS: z = 128 – 128i.

Bài 5: Tính số phức sau: $\begin{cases} \left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1 \\ \left|\frac{z-3i}{z+i}\right| = 1 \end{cases}$. ĐS: z =1+ *i*.

Dạng 3. Tính giá trị biểu thức

Lưu ý: *$i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$;*

Bài 1: Tính giá trị biểu thức: a) $A = \sqrt{1 + i\sqrt{3}} + \sqrt{1 - i\sqrt{3}}$. ĐS: $A = \sqrt{6}$.

b) $P = \frac{i^2 + i^4 + \ldots + i^{2008}}{i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2009}}$;$ĐS : P = 0$; c) $Q = \frac{i^5 + i^7 + i^9 + \ldots + i^{2009}}{i^4 + i^5 + i^6 \ldots + i^{2010}}$;ĐS: $Q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Bài 2: Tính $s = i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} (n \in \mathbb{N})$.

Tìm phần thực, phần ảo của số phức $z = 1 + i + i^2 + \ldots + i^{2010}$. HD: $s = 0$; $z = i$

Bài 3: Tính: S = $i^{105} + i^{23} + i^{20} - i^{34}$. ĐS: S = 2.

Dạng 3. Dạng Lượng giác của số phức

Bai tap: Bieu dien cac so phöc sau ñay döôi dang löông giac

a) $z = 1 + i$ b) $z = 1 - i$ c) $z = -3$

d) $z = 5$ e) $z = i$ f) $z = -2i$

g) $z = 1 + i\sqrt{3}$ h) $z = 1 - i\sqrt{3}$ i) $z = -1 + i\sqrt{3}$

j) $z = -1 - i\sqrt{3}$ k) $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

HD : a) $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ b) $z = \sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4})$ c) $z = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$

d) $z = 5(\cos 0 + i\sin 0)$ e) $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ f) $z = 2[\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}]$

g) $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ h) $z = 2(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3})$ i) $z = 2(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

j) $z = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$ k) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

VẤN ĐỀ 2: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Dạng 1: Phương trình bậc hai

1. Bài tập mẫu:

Bài 1: (CD10) Giải phương trình $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0$ trên tập hợp các số phức.

Giải: Phương trình có biệt thức $\Delta = (1+i)^2 - 4(6+3i) = -24 - 10i = (1-5i)^2$

Phương trình có hai nghiệm là: $z = 1 - 2i$ và $z = 3i$.

Bài 2: (A09) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

Giải: Ta có: $\Delta = 2^2 - 4.10 = -36 = 36i^2$

Phương trình có hai nghiệm là: $z_1 = -1 + 3i$ và $z_2 = -1 - 3i$.

$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ và $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$ Vậy $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 20$

Bài 3: (CD09) Giải phương trình sau trên tập hợp các số phức: $\dfrac{4z - 3 + 7i}{z - i} = z - 2i$

Giải:Điều kiện: $z \neq -1$, phương trình đã cho tương đương với $z^2 - (4+3i)z + 1 + 7i = 0$

$\Delta = (4+3i)^2 - 4(1+7i) = 3 - 4i = (2-i)^2$, pt có 2 nghiệm là: $z = 1 + 2i$ và $z = 3 + i$.

2. Bài tập đề nghị có đáp số: Giải phương trình : $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$. ĐS: $z_1 = 2i$; $z_2 = -1 + i$.

Dạng 2: Phương trình quy về bậc hai

Đối với dạng này ta thường gặp phương trình bậc 3 hoặc phương trình bậc 4 dạng đặc biệt có thể quy được về bậc hai.

Đối với phương trình bậc 3 (hoặc cao hơn), về nguyên tắc ta cố gắng phân tích vế trái thành nhân tử (để đưa về phương trình tích) từ đó dẫn đến việc giải phương trình bậc nhất và bậc hai.

Đối với một số phương trình khác, ta có thể đặt ẩn phụ để quy về phương trình bậc hai mà ta đã biết cách giải.

2.1. Phương pháp phân tích thành nhân tử.

Bài 1: Cho phương trình sau: $z^3 + (2 - 2i)z^2 + (5 - 4i)z - 10i = 0$ (1)

1) Chứng minh rằng (1) nhận một nghiệm thuần ảo.
2) Giải phương trình (1).

ĐS: 1) (1) có nghiệm thuần ảo $z = 2i$; 2) $z = 2i; z = -1-2i; z = -1+2i$.

Bài 2: Giải phương trình: $z^3 = 18 + 26i$, ĐS: $z = 3 + i$.

Bài 3:

1) Tìm các số thực *a*, *b* để có phân tích: $z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = (z-3)(z^2 + az + b)$
2) Giải phương trình: $z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = 0$

ĐS: 1) $a = 6; b = 21$; 2) $z = 3$; $z = -3+2\sqrt{3}i$; $z = -3-2\sqrt{3}i$.

Bài 4: Giải phương trình: $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$ ĐS: $z = 1$; $z = 3$; $z = 2i$; $z = -2i$.

Bài 5: Giải phương trình: $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.ĐS: $z = -1$, $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Bài 6: Giải phương trình $z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0$, biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.HD: Giả sử nghiệm thuần ảo là $z = yi$. Thay vào phương trình $\Rightarrow y = 1$.

Bài 7: Giải phương trình $z^3 - (5+i)z^2 + 4(i-1)z - 12 + 12i = 0$, biết rằng phương trình có một nghiệm thực.HD: $(z-6)(z^2 + (1-i)z - 2i + 2) = 0$.

2.2 Phương pháp đặt ẩn phụ.

Đối với các bài toán về số phức, thông thường cách giải gọi số phức z = a + bi (a, b thực) và coi i như một ***tham số*** *trong* ***bài toán thực.*** *Sau khi biến phức tạp thành đơn giản ta lại giải* ***bài toán phức.*** *Đây được coi như phương pháp vạn năng nhất cho mọi bài.*

Bài 1: Giải phương trình: $(z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$

ĐS: $z = \frac{-1+\sqrt{23}i}{2}; z = \frac{-1-\sqrt{23}i}{2}; z = 1; z = -2$.

Bài 2: Giải phương trình: $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0$

ĐS: $z = -1+\sqrt{5}i$; $z = -1-\sqrt{5}i$; $z = -3+\sqrt{3}$; $z = -3-\sqrt{3}$.

Bài 3: Giải phương trình: $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$

ĐS: $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; $z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài 4: Giải pt: $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0$ ĐS: $z_1 = 1 + i$; $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_3 = 1 - i$; $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Bài 5: Giải phương trình: $\left(\frac{z+i}{i-z}\right)^3 = 1$ ĐS: $z = 0$; $z = \pm\sqrt{3}$.

VẤN ĐỀ 3: CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH – CỰC TRỊ

Trong dạng này ta gặp các bài toán chứng minh một tính chất, hoặc một đẳng thức về số phức. Để giải các bài toán dạng trên, ta áp dụng các tính chất của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, số phức liên hợp, môđun của số phức đã được chứng minh.

- ✓ z la so thöc $\Leftrightarrow z = \overline{z}$; z la so ao $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$

1. Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Cho z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $P = \left|z + \frac{1}{z}\right|$.

Giải : Ta có $|z|=1 \Rightarrow 0\le(\mathrm{Re}(z))^2\le 1, P\ge 0$. Ta có:

$$P^2=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right)=1+\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}+1=z^2+\bar{z}^2+2z.\bar{z}=\left(z+\bar{z}\right)^2=4\left(\mathrm{Re}(z)\right)^2$$

⇨ MaxP=P(z=1)=2 , MinP=P(z=i)=0

Bài tập 2 : Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\frac{1}{z}\right|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z|$.

Hướng dẫn: 1=$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right)=z.\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}+\frac{1}{z.\bar{z}}=|z|^2+\left(\frac{z^2+\bar{z}^2}{|z|^2}\right)+\frac{1}{|z|^2}$

⇔ $|z|^4-3|z|^2+1+(z+\bar{z})^2=0$ ⇔ $|z|^4-3|z|^2+1=-(z+\bar{z})^2=-4\mathrm{Re}^2(z)\le 0$

⇔ $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\le|z|^2\le\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ⇔ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\le|z|\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vậy $max|z|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$**,** $\min|z|=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

2. Bài tập đề nghị có đáp số:

Bài 1: Cho $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. CMR: E = $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}.z_2\in\mathbb{R}$ HD: $z\in\mathbb{R}$ ⇔ $z=\bar{z}$

Bài 2: Chứng minh rằng: Nếu $|z_1| = |z_2| = 1$, $z_1.z_2 \ne 1$ thì $A=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in\mathbb{R}$

Bài 3: Cho số phức $z\ne 0$ thoả mãn $\left|z^3+\frac{1}{z^3}\right|\le 2$. Chứng minh rằng: $\left|z+\frac{1}{z}\right|\le 2$. HD: $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

Bài 4: Chứng minh rằng với mỗi số phức z, có ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau xảy ra:

$|z+1|\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ hoặc $|z^2+1|\ge 1$ HD: Chứng minh phản chứng.

Bài 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$ nếu $|z-2+2i|=1$ ĐS: $\min|z|=2\sqrt{2}-1$.

VẤN ĐỀ 4 : TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

Giả sử $z = x + yi$ ($x,y\in\mathbb{R}$). Khi đó, sử dụng dữ kiện của đề bài để tìm mối liên hệ giữa x và y từ đó suy ra tập hợp điểm M.

Cần biết:

- ✓ $z = x + yi \Rightarrow |z|=\sqrt{x^2+y^2}$
- ✓ $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2 \Rightarrow$ *tập hợp các số phức là đường tròn tâm* I(a; b) va bán kính R
- ✓ $(x-a)^2+(y-b)^2 < R^2$ *là các điểm nằm trong đường tròn (I;R)*
- ✓ $(x-a)^2+(y-b)^2 > R^2$ *là các điểm nằm ngoài đường tròn (I;R)*

1. Bài tập mẫu:

Bài 1: (D09) Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện $\left|z-(3-4i)\right|=2$.

Giải: Gọi z = x + yi $(x \in R, y \in R)$, ta có: $z-3+4i=(x-3)+(y+4)i$

Từ giả thiết ta có: $\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=4$

Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm I(3, -4), bán kính R = 2.

Bài 2: (B10) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức *z* thỏa mãn: $|z-i|=|(1+i)z|$

Giải: Gọi z = x + yi $(x \in R, y \in R)$, ta có:

$$|z-i|=|(1+i)z| \Leftrightarrow |x+(y-1)i|=|(x-y)+(x+y)i|$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-y)^2+(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2$$

Vậy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm I(0, -1), bán kính R = $\sqrt{2}$.

2. Các bài tập đề nghị có đáp số:

Bài 1: Tìm tập hợp số phức z thoả:

1) $\left|z-1+i\right|=2$; 2) $\left|2+z\right|=\left|1-i\right|$; 3) $\left|2+z\right|>\left|z-2\right|$; 4) $\left|z-4i\right|+\left|z+4i\right|=10$; 5) $|z-2|=3$;

6) $|z+i|<1$; 7) $|z-1+2i|>3$; 8) $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=2$

ĐS: 1) đường tròn có tâm tại I(1; –1) và bán kính R = 2. 2) đường thẳng $4x+2y+3=0$.

3) nửa mặt phẳng bên phải trục tung. 4) Elip (E) là: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Bài 3: Tìm tập hợp số phức z thoả mãn một trong các điều kiện sau đây:

1) $|z+\bar{z}+3|=4$; 2) $|z+\bar{z}+1-i|=2$; 3) $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$; 4) $|z^2-\bar{z}^2|=4$

ĐS: 1) hai đường thẳng song song với trục tung: $x=\dfrac{1}{2}; x=-\dfrac{7}{2}$.

2) hai đường thẳng song song với trục hoành $y=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

3) parabol $y=\dfrac{x^2}{4}$. 4) hai nhánh Hypecbol: $xy=1$ và $xy=-1$.

Bài 4: Cho $z_1=1+i$; $z_2=-1-i$. Tìm $z_3 \in \mathbb{C}$ sao cho các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 tạo thành tam giác đều.

HD: Giả sử $M_1(x_1; y_1)$ biểu diễn số phức $z_1=x_1+y_1i$; $M_2(x_2;y_2)$ biểu diễn số phức $z_2=x_2+y_2i$. Khi đó khoảng cách giữa hai điểm M_1M_2 bằng môđun của số phức z_1-z_2.

Vậy: $M_1M_2=|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

ĐS: có hai số phức thoả mãn là: $z_3=\sqrt{3}(1+i)$ hoặc $z_3=-\sqrt{3}(1-i)$.

Bài 7: Cho các điểm A, B, C, A', B', C' biểu diễn các số phức: $1-i;\ \ 2+3i;\ \ 3+i;\ \ 3i;\ 3-2i;\ 3+2i$.

Chứng minh Δ ABC và Δ A'B'C' có cùng trọng tâm G. Tìm số phức biểu diễn G. ĐS: G(2; 1) → z = 2 + *i*.

Bài 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M là điểm biểu diễn cho số phức z = 3 – 4*i*; M' là điểm biểu diễn cho số phức $z' = \frac{1+i}{2}z$. Tính diện tích tam giác OMM'. ĐS: $S_{\Delta OMM'} = \frac{25}{4}$.

VẤN ĐỀ 5: TÌM SỐ PHỨC CÓ MOĐUN NHỎ NHẤT

- Giả sử z = *x* + *yi* (x,y∈R). Khi đó, sử dụng dữ kiện của đề bài để tìm mối liên hệ giữa x và y từ đó suy ra tập hợp điểm M.
- Tìm điều kiện để $|z| = OM$ nhỏ nhất

1. Bài tập mẫu: Trong các số phức z thoả mãn điều kiện:

$$|z-2-4i| = |z-2i|$$

Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

Lời giải.

Viết $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

$|z-2-4i| = |z-2i| \Leftrightarrow |(x-2)+(y-4)i| = |x+(y-2)i| \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2 =$

Khi đó $x^2 + (y-2)^2$

$\Leftrightarrow -4x - 4y + 16 = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x$

Đến đây ta có thể giải theo hai cách:

Cách 1 (Đại số)

Ta có $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(4-x)^2} = \sqrt{2x^2-8x+16} = \sqrt{2(x-2)^2+8} \geq 8$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Vậy $\min |z| = 2\sqrt{2}$ khi $x = 2, y = 2$ hay $z = 2 + 2i$

Cách 2 (Hình học)

Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-2-4i| = |z-2i|$ là đường thẳng $d : y = 4 - x$.

Số phức z có môđun nhỏ nhất thỏa mãn $|z-2-4i| = |z-2i|$ được biểu diễn bởi điểm M trên d cách O khoảng gần nhất. Do đó M là hình chiếu của O trên d.

ĐS: $z = 2 + 2i$

2. Bài tập đề nghị: Trong các số phức thoả điều kiện dưới đây, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

1) |z – 1 - 2*i*| = 2

Hướng dẫn:- Tìm tập hợp z, *kết quả: tập hợp z là đường tròn (C) có tâm I(1; 2) và bán kính R = 2*

- Mođun của số phức z là: $|z| = OM$ với M∈ (C).

Do đó, $|z|_{\min} \Leftrightarrow OM_{\min} \Leftrightarrow \begin{cases} M = (C)\cap OI \\ M \text{ gần } O \text{ nhất} \end{cases}$ ĐS: z = $\frac{5-2\sqrt{5}}{5} + \frac{10-4\sqrt{5}}{5}i$

2) |z – 2+3*i*| = $\frac{3}{2}$ ĐS: z = $\frac{26-3\sqrt{13}}{13} + \frac{78-9\sqrt{13}}{26}$i.

TỔNG HỢP CÁC ĐỀ THI ĐẠI HỌC CAO ĐẲNG

----

1). Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị của biểu thức: $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$ *(ĐH KA-2009)* ***ĐS:*** $A = 20$

2). Tìm số phức z thỏa $|z-(2+i)| = \sqrt{10}$ và $z.\bar{z} = 25$ *(ĐH KB-2009)* ***ĐS:*** $z = 3+4i$ hoặc $z = 5$

3). Trong mp (Oxy), tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện:

$\left|z-(3-4i)\right|=2$ *(ĐH KD-2009)* ***ĐS:*** Đường tròn tâm $I(3;-4)$, bán kính $R=2$

4). Cho số phức z thỏa mãn: $(1+i)^2(2-i)z=8+i+(1+2i)z$.

Xác định phần thực, phần ảo của số phức z. *(CĐ Khối A,B,D-2009). **ĐS:*** $\mathrm{Re}(z)=-2;\ \mathrm{Im}(z)=5$

5). Giải phương trình: $\dfrac{4z-3-7i}{z-i}=z-2i$ trên $\mathbb{C}$. *(CĐ Khối A,B,D-2009).**ĐS:*** $z_1=1+2i;\ z_2=3+i$

6). Tìm phần ảo của số phức z, biết: $\bar{z}=\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)$. *(ĐH KA-2010).**ĐS:*** Phần ảo: $-\sqrt{2}$

7). Cho số phức z thỏa mãn: $\bar{z}=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$. Tìm mô đun của $\bar{z}+iz$ *(ĐH KA-2010). **ĐS:*** $\left|\bar{z}+iz\right|=8\sqrt{2}$

8). Trong mp (Oxy), tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện:

$\left|z-i\right|=\left|(1+i)z\right|$ *(ĐH KB-2010).* ***ĐS:*** Đường tròn $x^2+(y+1)^2=2$

9). Tìm số phức z thỏa: $\left|z\right|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo. *(ĐH KD-2010).**ĐS:*** $z_1=1\pm i$; $z_2=-1\pm i$

10). Cho số phức z thỏa mãn: $(2-3i)z+(4+i)\bar{z}=-(1+3i)^2$.

Xác định phần thực , phần ảo của z. *(CĐ Khối A,B,D-2010).* ***ĐS:*** Phần thực bằng –2 , phần ảo bằng 5.

11). Giải phương trình: $z^2-(1+i)z+6+3i=0$, trên $\mathbb{C}$. *(CĐ Khối A,B,D-2010). **ĐS:*** $z_1=1-2i$; $z_2=3i$

12). Tìm các số phức z, biết: $z^2=\left|z\right|^2+\bar{z}$. *(ĐH KA-2011).* ***ĐS:*** $z=0\vee z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\vee z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

13). Tính mô đun của số phức z, biết: $(2z-1)(1+i)+(\bar{z}+1)(1-i)=2-2i$. *(ĐH KA-2011).**ĐS:*** $\left|z\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

14). Tìm số phức z, biết: $\bar{z}-\dfrac{5+\sqrt{3}i}{z}-1=0$. *(ĐH KB-2011).* ***ĐS:*** $z=-1-i\sqrt{3}\vee z=2-i\sqrt{3}$

15). Tìm phần thực, ảo của số phức $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3$. *(ĐH KB-2011).**ĐS:*** Phần thực bằng 2, phần ảo bằng 2.

16). Tìm số phức z, biết: $z-(2+3i)\bar{z}=1-9i$. *(ĐH KD-2011).* ***ĐS:*** $z=2-i$

17). Cho số phức z thỏa man: $(1+2i)^2z+\bar{z}=4i-20$. Tính mô đun của z. ***(CĐ Khối A,B,D-2010).ĐS:*** $\left|z\right|=5$

18). Cho số phức z thỏa mãn: $z^2-2(1+i)z+2i=0$.

Tìm phần thực, phần ảo của $\dfrac{1}{z}$.*(CĐ Khối A,B,D-2011).* ***ĐS:*** $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{2}$; $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\dfrac{1}{2}$

19). Cho số phức z thỏa: $\dfrac{5\left(\bar{z}+i\right)}{z+i}=2-i$. Tính mô đun $\left|1+z+z^2\right|$ *(ĐH KA-2012). **ĐS:*** $\left|1+z+z^2\right|=\sqrt{13}$

20). Cho số phức z thỏa mãn: $(2+i)z+\dfrac{z(1+2i)}{1+i}=7+8i$.

Tìm mô đun số phức $\left|z+1+i\right|$. *(ĐH KD-2012).* ***ĐS:*** $\left|z+1+i\right|=5$

21). Giải phương trình: $z^2+3(1+i)z+5i=0$ trên C. *(ĐH KD-2012).**ĐS:*** $z=-1-2i\vee z=-2-i$

22). Cho z thỏa $(1-2i)-\dfrac{2-i}{1+i}=(3-i)z$. Tìm tọa độ biểu diễn z trong mặt phẳng Oxy*(CĐ 2012).*

23). Gọi $z_1;z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2-2z+1+2i=0$.

Tính $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$. *(CĐ Khối A,B,D-2012).**ĐS:*** $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|=1+\sqrt{5}$

ĐỀ THI ĐẠI HỌC VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI SỐ PHỨC NĂM 2013

KA-2013: Cho số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Viết dạng lượng giác của z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = (1+i)z^5$

Bài giải: r = $\sqrt{1+3}$ = 2; tgφ = $\sqrt{3}$, chọn $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

⇒ dạng lượng giác của z là z = $2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$

⇒ z^5 = $32(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}) = 32(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

⇒ w = 32(1 + i) $(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ $= 32(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}) + 32i(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2})$

Vậy phần thực của w là : $32(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2})$ và phần ảo là $32(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

KD-2013: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)(z-i) + 2z = 2i$.

Tính môđun của số phức $w = \dfrac{\overline{z} - 2z + 1}{z^2}$

Bài giải: (1 + i)(z – i) + 2z = 2i ⇔ (3 + i)z = -1 + 3i ⇔ $z = \dfrac{-1+3i}{3+i} = i$.

Ta có: $w = \dfrac{\overline{z} - 2z + 1}{z^2} = \dfrac{-i - 2i + 1}{i^2} = -1 + 3i \Rightarrow |w| = \sqrt{10}$

CĐ-2013:

1) Cho số phức z, thỏa mãn điều kiện $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4 + i$.

Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = (1+z)\overline{z}$.

Bài giải:(3 + 2i)z = 4 + I – 3 + 4i = 5i + 1 ⇔ z = $\dfrac{(5i+1)(3-2i)}{13} = 1 + i$

w = (2 + i)(1 – i) = 3 – i. Vậy phần thực của w là 3 và phần ảo là -1.

2) Giải phương trình $z^2 + (2-3i)z - 1 - 3i = 0$ trên tập hợp C các số phức.

Bài giải: z^2 + (2 – 3i)z – 1 – 3i = 0. Δ = 4 – 12i – 9 + 4 + 12i = -1 = i^2

Do đó, pt có 2 nghiệm: z = $\dfrac{-2+3i-i}{2}$ = -1 + i hay z = $\dfrac{-2+3i+i}{2} = -1 + 2i$.

CHÚC CÁC EM HỌC TỐT

Lớp bồi dưỡng kiến thức và LTĐH chất lượng cao

www.huynhvanluong.com

Lớp học thân thiện của học sinh Tây Ninh

0918.859.305 – 01234.444.305 – 0996.113.305-0929.105.305-0967.859.305
